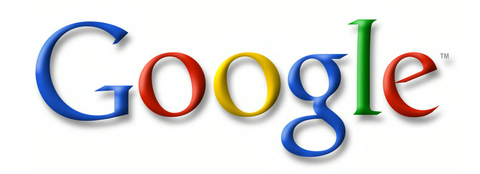
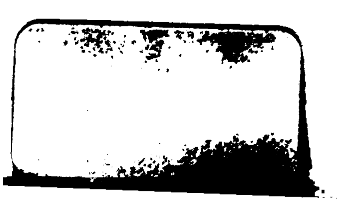
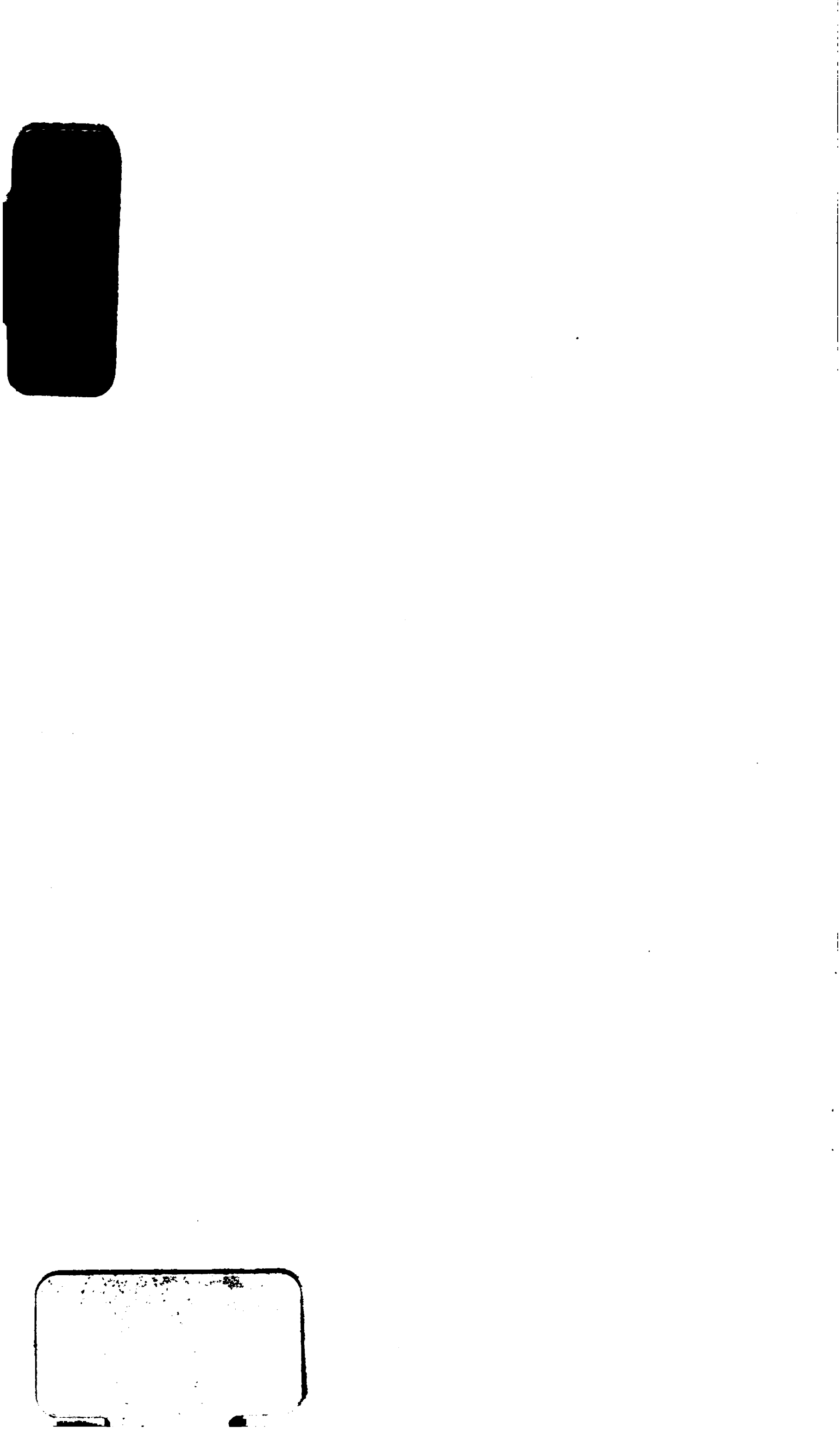








NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

TROISIÈME SÉRIE.

1892.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

M. CH. BRISSE,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE ET AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

M. E. ROUCHÉ,

EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM Gerono, Prouhet, Bourget et Brisse.

3

TROISIÈME SÉRIE.

11

TOME ONZIÈME.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

SUR L'ÉLIMINATION;

PAR M. H. LAURENT.

Je vais faire connaître une méthode d'élimination qui permet d'écrire explicitement la résultante de deux équations, sans même qu'il soit nécessaire de faire intervenir les coefficients de cette équation.

Pour former la résultante des deux équations

$$\varphi(x) = 0, \qquad \psi(x) = 0$$

des degrés m et n où $m \geqq n$, *on désignera par* a_1, a_2, ..., a_m *des quantités numériques quelconques, on posera*

$$c_{ij} = \frac{\varphi(a_j)\psi(a_i) - \varphi(a_i)\psi(a_j)}{a_j - a_i} = c_{ji},$$
$$c_{ii} = \varphi'(a_i)\psi(a_i) - \varphi(a_i)\psi'(a_i),$$

et la résultante sera

$$\Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{mm} = 0.$$

Démonstration. — Posons

$$F(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m),$$
$$\zeta_i = \frac{F(x)}{F'(a_i)} \frac{1}{x - a_i}.$$

La formule d'interpolation de Lagrange donne

$$(1)\quad \frac{\varphi(x)\,\psi(a_i)-\psi(x)\,\varphi(a_i)}{x-a_i}=c_{i1}\xi_1+c_{i2}\xi_2+\ldots+c_{im}\xi_m.$$

Si nous désignons, en général, par $G^{(j)}$ ce que devient une fonction G de x quand on remplace x par une racine x_j de $\varphi(x)=0$, la formule (1) deviendra

$$-\frac{\psi(x_j)\,\varphi(a_i)}{x_j-a_i}=c_{i1}\xi_1^{(j)}+c_{i2}\xi_2^{(j)}+\ldots+c_{im}\xi_m^{(j)},$$

ce qui montre que le déterminant D des quantités $-\frac{\psi(x_j)\varphi(a_i)}{x_j-a_i}$ est le produit du déterminant C des quantités c_{ij} par le déterminant X des quantités $\xi_i^{(j)}$, ainsi

$$(2)\qquad D=CX.$$

Or on a

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} D=(-1)^m\,&\psi(x_1)\,\psi(x_2)\ldots\psi(x_m)\\ &\times\varphi(a_1)\,\varphi(a_2)\ldots\varphi(a_m)\\ &\times\sum\pm\frac{1}{x_1-a_1}\,\frac{1}{x_2-a_2}\cdots\frac{1}{x_m-a_m},\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad X=\frac{F(x_1)F(x_2)\ldots F(x_m)}{F'(a_1)F'(a_2)\ldots F'(a_m)}\sum\pm\frac{1}{x_1-a_1}\cdots\frac{1}{x_m-a_m}$$

et

$$F(x_1)F(x_2)\ldots F(x_m)=\varphi(a_1)\varphi(a_2)\ldots\varphi(a_m)\,\frac{1}{A_m}\,(-1)^m,$$

A_m désignant le coefficient de x^m dans $\varphi(x)$; donc

$$(5)\quad C=\psi(x_1)\,\psi(x_2)\ldots\psi(x_m)\,F'(a_1)\,F'(a_2)\ldots F'(a_m)\,A_m.$$

$C=0$ est donc bien la résultante.

Remarques. — 1° On a supposé que a_1, a_2, ... étaient des nombres; si ces quantités dépendaient des

coefficients de φ et ψ, la résultante serait

$$C = 0,$$
$$F'(a_1)F'(a_2)\ldots F'(a_m).$$

2° Les propriétés connues relatives au degré de la résultante sont évidentes sous la nouvelle forme que nous venons de faire connaître.

3° Enfin la méthode que nous venons de donner peut être généralisée et étendue à un nombre quelconque d'équations.

4° La racine commune s'obtiendra en résolvant les équations

$$c_{i1}\xi_1 + \ldots + c_{im}\xi_m = 0,$$

qui sont, en général, au nombre de $m - 1$ distinctes. L'un des ξ étant connus, on en déduit x, etc.

ERRATA AUX TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRÖN.

Page XI, ligne 35 (colonne 1), *au lieu de* (p. 8), *lisez* (p. XII).

ERRATA AU RECUEIL DE FORMULES DE HOÜEL.

Pages.	Lignes.	*Au lieu de :*	*Lisez :*
XIX....	14	4,4875	$\bar{4}.4875$
XXVII..	3	$\frac{\Gamma(2n-1)}{2^n\Gamma(n-1)}$	$\frac{\Gamma(2n+1)}{2^n\Gamma(n+1)}$
XXVII..	4	$\frac{\Gamma(2n-1)}{2^{2n}[\Gamma(n-1)]^2}$	$\frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n}[\Gamma(n+1)]^2}$
XXXI...	22 (colonne 1)	$\frac{1+\mathrm{Th}\,u}{1+\mathrm{Th}\,u}$	$\frac{1+\mathrm{Th}\,u}{1-\mathrm{Th}\,u}$

LA MÉTHODE DE GRASSMANN [1];

PAR M. E. CARVALLO,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

J'ai montré dans deux Notes [2] le parti qu'on peut tirer de cette méthode pour la théorie des déterminants. On verra ici comment cette théorie, telle que je l'ai exposée, découle naturellement de la Géométrie. Mais le présent travail a une portée plus haute. En effet, l'œuvre de Grassmann est aussi peu connue que qualifiée de magistrale. Magistrale, elle l'est par la profondeur de la pensée, par la correction et la rigueur du style, par la puissance de la méthode créée. Elle synthétise les théories connues de Mécanique et de Géométrie et sa place, je veux le montrer, est à la base de l'enseignement élémentaire. Cependant elle est peu connue. C'est que, à côté de mon admiration sans réserve pour le savant, j'adresserai au professeur une critique fondamentale. M. Hermite, dans son enseignement profond, se plaît à montrer que les Mathématiques sont du domaine des Sciences naturelles. C'est un grand attrait pour ses auditeurs de savoir qu'il va leur montrer des faits mathématiques découverts par l'Analyse et non pas créés par l'imagination du savant. Tout au contraire, Grassmann, comme s'il prenait à tâche de vous décourager, procède de l'abstrait au concret, de la convention au fait naturel. Il déploie un volume de puissants efforts pour établir un calcul en apparence

[1] *Die Ausdehnungslehre.* Berlin, 1862.

[2] *Nouvelles Annales*, 3e série, t. X; mai et août 1891.

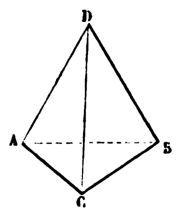
arbitraire sur des symboles dénués de signification, et cela avec quel luxe de mots nouveaux! Par miracle, ce calcul s'applique à la Géométrie. Mais il faut encore autant d'efforts pour le voir avec Grassmann qu'il en faudra au lecteur pour fonder avec nous la méthode sur des considérations de Géométrie élémentaire. De lui-même, il fera abstraction de la signification géométrique des symboles et possédera les règles abstraites de Grassmann, pour les appliquer à l'Analyse. Je rends hommage aux importants travaux de MM. Caspary (¹) et Péano (²) qui m'ont suggéré ce travail. M. Péano, s'inspirant du calcul barycentrique de Möbius a eu l'heureuse idée de baser son exposition sur le volume du tétraèdre. Je me suis empressé d'adopter ce principe. Mais mon exposition diffère pour le reste de celle de M. Péano. Je ne saurais trop conseiller au lecteur de lire son livre. Ma Note lui servira d'introduction. Il trouvera dans le livre des développements et des applications qui n'ont pas leur place dans un simple Article. Il reconnaitra avec satisfaction que je me suis formellement imposé de justifier les définitions, d'en préciser dès l'abord la signification intime, puis d'exclure les mots et les symboles nouveaux. Le langage ordinaire suffit.

I. — Formes géométriques. Définitions et règles de calcul.

1. Sens et signe d'un tétraèdre. — Pour définir le sens d'un tétraèdre ABCD, j'imagine un mobile parcourant dans le sens ABC le contour formé par ces trois premiers points, puis un observateur placé debout sur

(¹) *Journal de Kronecker*, t. C.— *Bulletin des Sc. math.*, 2ᵉ série, t. XI, 1887, et t. XIII, 1889.
(²) *Calcolo geometrico*. Turin, 1888.

le plan de ce triangle, à l'intérieur et la tête du côté du point D. Suivant que cet observateur voit le mobile tourner de droite à gauche ou en sens contraire, le tétraèdre a le sens *direct* ou *rétrograde*. Par ABCD, je



désigne le volume du tétraèdre précédé du signe + ou — suivant qu'il a le sens direct ou rétrograde. Dans le cas de la figure, on a

$$ABCD = + \text{vol. } ABCD,$$
$$BACD = - \text{vol. } ABCD.$$

On constate que l'expression ABCD change de signe quand on échange deux lettres consécutives, A avec B, B avec C, ou C avec D. On peut donc ranger les lettres dans tel ordre que l'on veut par une suite d'échanges entre deux lettres consécutives, chaque échange étant accompagné d'un changement de signe. Je vais maintenant définir trois entités qui permettent de représenter des points, des droites et des plans. Je les appelle respectivement *formes du premier, deuxième et troisième ordre*.

2. Formes du premier ordre. — Pour définir une forme du premier ordre, je considère des points A, A′, ... et des nombres correspondants m, m', ..., positifs ou négatifs, appelés *masses*. Enfin je prends un triangle arbitraire et variable PQR et je considère le

volume

(I) $$mAPQR + m'A'PQR + \dots$$

C'est une propriété de l'ensemble des points A, A', ... de masses m, m', ... de donner au volume (I) une valeur déterminée pour chaque triangle PQR. Si, quel que soit ce triangle, un deuxième ensemble $m_1 A_1$, $m_2 A_2$, ... donne pour la somme $m_1 A_1 PQR + m_2 A_2 PQR + \dots$ le même volume que le premier ensemble, les deux ensembles sont équivalents à l'égard de cette propriété. L'entité géométrique abstraite de l'ensemble mA, $m'A'$, ..., et commune à tous les ensembles ainsi équivalents, sera bien représentée par le symbole

(1) $$mA + m'A' + \dots,$$

qui résulte de (I) en supprimant l'écriture du triangle arbitraire PQR. Je l'appelle forme du *premier ordre*. La condition pour que la forme (1) soit équivalente à la forme $m_1 A_1 + m_2 A_2 + \dots$ est que l'égalité

(I)' $$mAPQR + m'A'PQR + \dots = m_1 A_1 PQR + m_2 A_2 PQR + \dots$$

soit satisfaite pour tout triangle PQR. Cette condition sera bien exprimée par la formule

(1)' $$mA + m'A' + \dots = m_1 A_1 + m_2 A_2 + \dots.$$

Je dirai que les deux formes sont *égales*.

3. Règles de calcul. — La première égalité (I)' est algébrique; la deuxième (1)', symbolique, n'en diffère que par l'écriture du triangle arbitraire PQR. Il en résulte que toutes les règles de l'Algèbre relatives au calcul des polynômes s'appliquent à la forme (1) et à l'égalité (1)', en regardant les petites lettres m comme des nombres et les grandes lettres comme des facteurs littéraux. Par exemple, dans l'expression (1), on peut ré-

duire deux termes semblables, c'est-à-dire, remplacer $m\mathrm{A} + n\mathrm{A}$ par $(m+n)\mathrm{A}$. Cela revient en effet à remplacer $m\mathrm{APQR} + n\mathrm{APQR}$ par $(m+n)\mathrm{APQR}$ dans l'expression *numérique* (1). J'emploierai aussi les mêmes dénominations qui sont employées pour les polynômes algébriques.

4. Exemple. — Considérons deux points A et A' et le milieu C de la droite qui les joint, je dis que l'on a

$$\mathrm{A} + \mathrm{A}' = 2\mathrm{C}.$$

Il suffit de vérifier que, pour tout triangle PQR, on a l'égalité

$$\mathrm{APQR} + \mathrm{A'PQR} = 2\mathrm{CPQR}.$$

Or les trois tétraèdres de cette formule ont même base PQR. La hauteur du troisième est moyenne arithmétique entre les deux autres ([1]). Le troisième tétraèdre est donc bien égal à la moyenne arithmétique entre les deux autres, comme l'exprime la dernière égalité.

Cet exemple suffit à faire comprendre qu'une forme du premier ordre représente généralement un point muni d'une masse. En Mécanique, elle représente la gravité d'un ensemble de points pesants, en particulier le centre de gravité muni d'une masse égale à la somme des masses des points composants.

L'égalité (1)' signifie que les deux systèmes considérés ont même centre de gravité et même masse totale. Ces considérations justifient le nom de *masse* donné à m, m', ...

5. Formes du deuxième ordre. — J'appelle *forme du deuxième ordre* et je représente par le symbole

$$(2) \qquad m\mathrm{AB} + m'\mathrm{A'B'} + \ldots$$

([1]) Ces hauteurs, bien entendu, sont susceptibles d'un signe.

l'entité abstraite de l'ensemble formé par des segments AB, A'B', ... munis de masses m, m', ..., et qui est commune à tout ensemble $m_1 A_1 B_1$, $m_2 A_2 B_2$, ... pour lequel l'égalité

$$(\text{II})' \quad m\,\text{ABPQ} + m'\,\text{A}'\text{B}'\text{PQ} + \ldots = m_1 \text{A}_1\text{B}_1\text{PQ} + m_2 \text{A}_2\text{B}_2\text{PQ} + \ldots$$

est satisfaite quel que soit PQ. La condition numérique (II)' s'écrit symboliquement, en supprimant l'écriture du segment arbitraire PQ,

$$(2') \quad m\,\text{AB} + m'\,\text{A}'\text{B}' + \ldots = m_1 \text{A}_1\text{B}_1 + m_2 \text{A}_2\text{B}_2 + \ldots.$$

En Mécanique, l'égalité (II)' représente le théorème des moments des forces m AB, m' A'B', ... pris par rapport à l'axe arbitraire PQ. Ainsi la formule symbolique (2)' représente la condition d'équivalence de deux systèmes de forces et la forme (2) l'effet mécanique d'un système de forces appliquées à un corps solide.

6. Formes du troisième ordre. — J'appelle *forme du troisième ordre* et je représente par

$$(3) \qquad m\,\text{ABC} + m'\,\text{A}'\text{B}'\text{C}' + \ldots$$

l'entité qui est commune à l'ensemble des triangles ABC, A'B'C', ... munis de masses m, m', ... et à tout ensemble $m_1 A_1 B_1 C_1$, $m_2 A_2 B_2 C_2$, ..., pour lequel l'égalité

$$(\text{III})' \quad m\,\text{ABCP} + m'\,\text{A}'\text{B}'\text{C}'\text{P} + \ldots = m_1 \text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{P} + m_2 \text{A}_2\text{B}_2\text{C}_2\text{P} + \ldots$$

est satisfaite quel que soit P. Cette condition s'écrit symboliquement

$$(3)' \quad m\,\text{ABC} + m'\,\text{A}'\text{B}'\text{C}' + \ldots = m_1 \text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1 + m_2 \text{A}_2\text{B}_2\text{C}_2 + \ldots.$$

On verra qu'une forme du troisième ordre représente, en général, un plan muni d'un sens et d'une masse.

7. Règles pour le calcul d'une forme. — Les règles

pour le calcul des polynômes algébriques s'appliquent aux formes (2) et (3) comme aux formes (1). La démonstration est la même (n° 3). Nous emploierons aussi les mêmes dénominations. On peut écrire *les termes* d'une forme dans un ordre arbitraire, ajouter et retrancher un même terme, réduire les termes semblables, etc.

Il y a cependant cette différence qu'ici l'ordre des points dans chaque monôme influe sur son signe. Ainsi l'on a

$$m\mathrm{AB} + n\mathrm{BA} = m\,\mathrm{AB} - n\mathrm{AB} = (m - n)\mathrm{AB}.$$

C'est une conséquence de la définition du signe d'un tétraèdre. En effet, cette définition entraîne l'égalité numérique

$$\mathrm{ABPQ} = -\mathrm{BAPQ};$$

par suite, d'après la définition d'une forme du second ordre (n° 5),

$$\mathrm{AB} = -\mathrm{BA}.$$

Il en résulte aussi les formules

$$\mathrm{AA} = 0, \qquad \mathrm{AB} = \mathrm{A}(\mathrm{B} + \lambda\mathrm{A}),$$

dont nous ferons un fréquent usage.

8. Multiples et sous-multiples. Addition et soustraction. — Multiplier une forme par un nombre quelconque, positif ou négatif, c'est multiplier par ce nombre chaque terme de la forme. Ajouter plusieurs formes, c'est réunir dans une seule forme tous les termes qui figurent dans les formes proposées, en conservant leurs signes. De ces notions résultent celles de la division par un nombre et de la soustraction des formes. A l'aide de ces opérations, on pourra former une fonction linéaire homogène de plusieurs formes de même ordre. Toutes les règles du calcul des polynômes

algébriques s'appliquent à ces opérations, pourvu qu'on tienne compte de l'ordre des facteurs littéraux (n° 7). La démonstration est celle du n° 3.

9. Multiplication des formes dont la somme des ordres ne surpasse pas 4. — Je considère, par exemple, les deux formes

$$(1) \qquad mA + m'A' + m''A'',$$

$$(2) \qquad pBC + p'B'C'.$$

J'imagine que les symboles (1) et (2) représentent des polynômes algébriques et j'effectue la multiplication du premier par le second d'après les règles de l'Algèbre, *en respectant toutefois l'ordre des facteurs littéraux*. J'obtiens

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} mp\,ABC + m'p\,A'BC + m''p\,A''BC \\ + mp'AB'C' + m'p'A'B'C' + m''p'A''B'C'. \end{array} \right.$$

Ce symbole peut représenter une forme du troisième ordre. Cette forme, à cause de son origine, je l'appelle le *produit des formes* (1) *et* (2).

10. Règles de calcul. — 1° Pour s'assurer de l'intérêt de cette notion, on doit constater que le produit ne change pas quand on remplace les formes (1) et (2) par des formes égales. Cela est facile.

Remplaçons en effet la forme (1) par la forme supposée égale

$$(1)' \qquad m_1 A_1 + m_2 A_2.$$

Le produit de (1)' par (2) sera

$$(3)' \qquad \left\{ \begin{array}{l} m_1 p\, A_1 BC + m_2 p\, A_2 BC \\ + m_1 p' A_1 B'C' + m_2 p' A_2 B'C'. \end{array} \right.$$

Or la forme (1) étant égale à (1)', on a d'après la dé-

finition de cette égalité (n° 2) les deux égalités numériques

$$mABCR + m'A'BCR + m''A''BCR = m_1 A_1 BCR + m_2 A_2 BCR,$$
$$mAB'C'R + m'A'B'C'R + m''A''B'C'R = m_1 A_1 B'C'R + m_2 A_2 B'C'R,$$

où R est un point arbitraire. J'ajoute membre à membre ces deux égalités après les avoir multipliées respectivement par p et p'. J'obtiens une égalité numérique qui a lieu quel que soit R. Celle-ci exprime que la forme (3) égale la forme (3'), (n° 6). De même on peut remplacer la forme (2) par une forme égale; on peut multiplier l'une d'elles par un nombre, pourvu qu'on divise l'autre par le même nombre.

2° On pourra aussi considérer des produits de plus de deux formes, pourvu que la somme des ordres ne surpasse pas 4. Si cette somme égale 4, le produit représente un volume qu'on peut regarder comme une forme du quatrième ordre.

3° Une forme monôme peut être regardée comme le produit de son coefficient et des points qui y figurent et cela de bien des manières différentes. Ainsi l'on a, en marquant par un point le signe de la multiplication,

$$mABC = m.A.B.C = mA.BC = \frac{m}{p} AB.pC = -BA.mC \ldots.$$

4° Si, dans un produit de formes, on échange deux facteurs consécutifs d'ordres p et q, le produit est multiplié par $(-1)^{pq}$. Il suffit, pour le démontrer, de constater le fait pour chacun des termes du produit développé, ce qui est facile.

5° En résumé, les règles du *calcul algébrique* s'appliquent à celui des *formes géométriques,* avec cette seule différence que, dans ce dernier, un monôme change

de signe quand on échange deux facteurs du premier ordre. Cette règle entraîne plusieurs conséquences faciles que nous ne développerons pas. La précédente (4°) en est une. Nous utiliserons surtout celle du n° 7.

6° Nous serons conduits plus loin à considérer des produits pour lesquels la somme des ordres des facteurs est supérieure à 4. Mais nous verrons qu'un tel produit est égal à un produit de volumes par une forme du premier, du deuxième ou du troisième ordre. L'étude se réduit donc à celle des trois premières formes.

Nous verrons, comme il est facile de le prévoir, que :

Les formes d'ordre	1	représentent des	points,
»	2	»	droites,
»	3	»	plans,

ces éléments étant munis de masses qui sont respectivement des nombres abstraits, des longueurs et des aires.

Pour faciliter cette étude, il convient d'étudier d'abord le *vecteur*, forme égale à la différence de deux points et les formes qui résultent de la multiplication de deux ou trois vecteurs.

II. — Vecteurs.

11. Théorème. — *Pour que les deux formes* A′ — A *et* B′ — B *soient égales, il faut et il suffit que les segments* AA′ *et* BB′ *soient égaux, parallèles et de même sens* [1].

1° *La condition est suffisante.* — Si l'on considère le triangle arbitraire PQR, on a

$$(1)\qquad A'PQR - APQR = B'PQR - BPQR.$$

[1] Le lecteur est prié de faire les figures. Elles sont toujours très simples.

Car ces quatre pyramides, ayant même base PQR, sont mesurées par leurs hauteurs (positives ou négatives). De plus, à cause de l'hypothèse sur les segments AA' et BB', la différence des deux premières hauteurs égale la différence des deux autres.

L'égalité (I) étant vérifiée pour tout triangle PQR, on a par définition (n° 2)

$$(1) \qquad A' - A = B' - B.$$

2° *Réciproquement,* je suppose la relation (1) satisfaite. Je peux transporter le segment AA' parallèlement à lui-même (1°) de façon à placer le point A en B; A' viendra quelque part en A'' et l'on aura

$$A' - A = A'' - B = B' - B,$$

d'où

$$A'' = B'.$$

On conclut de là que A'' coïncide avec B' et, par suite, que le segment BB' n'est autre qu'une des positions de AA' transporté parallèlement à lui-même.

12. Définitions. — Ce théorème justifie le nom de *vecteur* que je donnerai à la forme $A' - A$. Elle comporte, en effet, l'idée d'une direction et d'une longueur, celles de AA'. Un vecteur dont la longueur est l'unité sera appelé *vecteur unité* ou *direction.* En se reportant à la démonstration précédente, on voit qu'un vecteur est égal au produit de sa direction par sa longueur, coefficient numérique que j'appelle *masse.* On peut aussi changer le signe de la masse en même temps que le sens de la direction. Pour la commodité, je dirai que A est l'origine et A' l'extrémité du vecteur $-A + A'$, quoique l'un de ces points soit arbitraire, comme on vient de le voir (n° 11).

13. SOMME DE VECTEURS. — D'abord l'ordre des termes est indifférent (n° 3). Je peux aussi mettre l'origine de chaque vecteur à l'extrémité du précédent (n° 11). Alors, dans la somme

$$S = (-A + A') + (-B + B') + (-C + C') \dots + (-H + H'),$$

les termes intermédiaires se détruisent, A' avec B, B' avec C, ...

Donc

$$S = -A + H'.$$

La somme de plusieurs vecteurs égale le vecteur qui a pour origine celle du premier et pour extrémité celle du dernier vecteur, après qu'on a mis tous les vecteurs bout à bout dans un ordre quelconque.

14. THÉORÈME. — *Pour que deux produits de deux vecteurs soient égaux, il faut et il suffit que, après qu'on a donné la même origine aux deux couples de vecteurs, les deux triangles obtenus soient dans un même plan, égaux et de même sens.*

Soit P l'origine arbitraire que je donne aux quatre vecteurs, l'égalité des deux produits s'écrira

$$(1) \qquad (-P + A)(-P + B) = (-P + A')(-P + B').$$

Or cette égalité équivaut par définition (n° 5) à la condition

$$(\text{I}) \quad QP(-P + A)(-P + B) = QP(-P + A')(-P + B'),$$

qui contient deux points arbitraires P et Q, ou (n° 7)

$$(\text{I})' \qquad QPAB \doteq QPA'B'.$$

L'égalité de ces deux tétraèdres doit avoir lieu quel que soit Q; en particulier, pour $Q = A'$, elle donne

$$A'PAB = A'PA'B' = 0.$$

Donc A′ est dans le plan PAB; de même B′ est dans le plan PAB. Les bases PAB, PA′B′ étant alors dans le même plan, la condition (I)′ exige que ces triangles soient égaux et orientés dans le même sens de rotation. Ces conditions sont évidemment suffisantes pour que la condition (I) soit toujours satisfaite. Comme elle contient deux points arbitraires P et Q, elle est équivalente à l'égalité (1). La condition de l'énoncé est donc bien nécessaire et suffisante.

15. Définition. — Un pareil produit de deux vecteurs, je l'appelle *couple,* parce que cette forme représente le couple de forces qu'on rencontre en Mécanique. C'est ce qui résulte du n° 14. Elle comporte une direction de plan, un sens et une aire, ceux du triangle PAB. Elle peut être regardée comme le produit de cette aire par un *couple unité* ou direction de plan. A chaque direction de plan munie d'un sens, on peut faire correspondre la direction de la droite perpendiculaire dans un sens convenu. On peut donc représenter un couple par un vecteur unité multiplié par une masse égale, non plus à une longueur comme au n° 12, mais à une surface. J'appelle ce produit l'*axe du couple.* Cette correspondance entre les couples et les vecteurs rentre dans le principe de dualité que nous rencontrerons plus loin.

16. Addition des couples. — Je considère deux couples; je peux toujours (n° 14) faire en sorte que ces couples aient un vecteur commun. Je peux alors écrire leur somme

$$IJ + IJ' = I(J + J').$$

Il suffit donc d'ajouter les vecteurs non communs J *et* J′. De plus, on peut toujours faire en sorte que I

soit un vecteur unité et que J et J′ soient perpendiculaires à I (n° 14). Les axes des couples s'obtiennent alors en faisant tourner J et J′ d'un angle droit autour de I. On voit ainsi que la somme des couples a pour axe la somme des axes des couples proposés. Ainsi :

Pour ajouter deux couples, il suffit d'ajouter leurs axes.

Cette règle fait rentrer l'addition des couples dans celle des vecteurs. Elle rentre dans le principe général de dualité appliqué aux vecteurs.

17. Théorème. — *Pour que deux produits de trois vecteurs soient égaux, il faut et il suffit que, si l'on donne une même origine à ces vecteurs, les deux tétraèdres qu'ils forment soient égaux et de même signe.*

En effet, soit P l'origine *arbitraire* commune. L'égalité des deux produits s'écrit

$$(1)\quad (P-A)(P-B)(P-C)=(P-A')(P-B')(P-C').$$

Elle équivaut à

$$(I)\quad P(P-A)(P-B)(P-C)=P(P-A')(P-B')(P-C'),$$

égalité entre deux volumes qui contient le point arbitraire P. Or (I) s'écrit

$$(I)'\qquad PABC=PA'B'C'.$$

Cette égalité, équivalente à l'égalité (1), signifie que les deux tétraèdres formés par les trois vecteurs de chaque produit sont égaux et de même signe. La notion du produit des trois vecteurs équivaut donc à celle d'un volume.

18. Corollaires. — 1° Dans un produit de trois vecteurs, on peut choisir arbitrairement deux quelconques d'entre eux. Leur produit forme un couple arbitraire. La composante normale du troisième vecteur devra seulement être égale au quotient du volume donné par l'aire du couple arbitraire.

2° Une somme de produits de trois vecteurs égale un produit de trois vecteurs dont le volume égale la somme des volumes représentés par les produits ajoutés.

3° *Le produit de quatre vecteurs est nul;* car il s'écrit, en désignant par A et A' des points, par I, I', I'' des vecteurs,

$$(A - A')II'I'' = AII'I'' - A'II'I''.$$

Or, les deux volumes du second membre étant égaux, leur différence est nulle.

4° *Les égalités* $AI = 0$, $AII' = 0$, $AII'I'' = 0$ *équivalent respectivement à* $I = 0$, $II' = 0$, $II'I'' = 0$.

En effet, $AI = 0$, par exemple, peut être remplacé (5) par

$$0 = PQAI = A(P - A)(Q - A)I.$$

Or, le dernier membre est égal au tétraèdre déterminé par les trois vecteurs $P - A$, $Q - A$ et I, dont les deux premiers sont arbitraires comme P et Q. Cette égalité équivaut donc à $I = 0$.

III. — Discussion des trois formes.

19. Forme du premier ordre. — I. *Réduction.* — Soit la forme

$$F = m_1 A_1 + m_2 A_2 + \ldots \tag{1}$$

Je prends un point O arbitraire. Il vient

$$\begin{cases} F = (m_1 + m_2 + \ldots)O + m_1(-O + A_1) \\ \qquad + m_2(-O + A_2) + \ldots = mO + I, \end{cases} \tag{2}$$

en appelant m la somme des masses $m_1, m_2, \ldots$, et I la somme des vecteurs $m_1(-O+A_1)$, $m_2(-O+A_2)$, ... obtenue comme on sait.

Deux cas se présentent :

Premier cas : $m = 0$. — F égale alors le vecteur I.

Second cas : $m \gtrless 0$. — Je pose

$$I = -O + A = m(-O+G).$$

Le point A s'obtiendra par la règle d'addition des vecteurs. Le point G sera l'extrémité du segment $OG = \frac{OA}{m}$ porté sur OA à partir du point O. Il vient

$$(3) \qquad F = mO + m(-O+G) = mG.$$

G est le centre de gravité du système. Pour l'obtenir, il suffit d'exécuter les constructions indiquées par les formules ci-dessus.

II. *Conséquences.* — 1° L'égalité (3) s'écrit, en mettant à la place de F sa valeur (1),

$$m_1(A_1-G)+m_2(A_2-G)+\ldots = 0.$$

Appliquée à deux points, elle montre que le point G est sur A_1A_2 et partage ce segment dans le rapport (positif ou négatif)

$$\frac{GA_1}{GA_2} = -\frac{m_2}{m_1}.$$

Cette remarque donne une seconde manière de trouver le centre de gravité en procédant de proche en proche.

2° Si m_2 est variable et tend vers $-m_1$, le point G s'éloigne indéfiniment sur A_1A_2. D'autre part, pour $m_2 = -m_1$, $m_1A_1 + m_2A_2$ représente un vecteur. On peut donc dire que le vecteur représente un point à

l'infini dans la direction de ce vecteur. Mais il le représente avec un coefficient numérique qui est la longueur de ce vecteur. En résumé :

Une forme du premier ordre représente un point muni d'une masse ou un vecteur, c'est-à-dire un point muni d'une masse à distance finie ou infinie.

20. Forme du second ordre. — I. *Réduction.* — Soit

$$F = m_1 A_1 B_1 + m_2 A_2 B_2 + \dots.$$

Je transforme un terme quelconque comme il suit

$$mAB = mA(B - A) = Am(B - A).$$

Soit O un point arbitraire et I le vecteur $m(B - A)$, j'aurai

$$mAB = AI = (A + O - O)I = OI + (A - O)I = OI + K,$$

en désignant par K le couple $(A - O)I$. En faisant la même transformation sur chaque terme de F, il vient

$$\begin{aligned} F &= OI_1 + K_1 + OI_2 + K_2 + \dots \\ &= O(I_1 + I_2 + \dots) + (K_1 + K_2 + \dots). \end{aligned}$$

Les sommes entre parenthèses peuvent être remplacées respectivement par un vecteur I et un couple K (13 et 16). On a donc

$$F = OI + K.$$

En Statique, OI est la résultante de translation, K le couple résultant.

II. *Conséquences.* — 1° *Pour que la forme* $F = OI + K$ *soit nulle, il faut que* K *et* I *soient nuls.*

En effet, en multipliant par O les deux membres de l'égalité

$$(1) \qquad OI + K = 0,$$

il vient $OK = 0$, d'où $K = 0$. L'égalité (1) donne alors

$$I = 0.$$

La condition d'égalité de deux formes réduites s'écrira

$$OI + K = O'I' + K' = (O + O' - O)I' + K'$$

ou

$$O(I - I') + [K - (O' - O)I' - K'] = 0.$$

Cette égalité équivaut, d'après ce qui précède, à

$$I' = I, \qquad K' = K + (O - O')I.$$

Ces formules renferment les conséquences qu'on développe en Mécanique. Pour en énoncer quelques-unes, je suppose que la forme $OI + K$ est donnée et que O' est variable.

2° *Pour qu'une forme* $OI + K$ *puisse être réduite à un couple* K', *il faut et il suffit que l'on ait* $I = 0$.

3° *Pour qu'une forme* $OI + K$ *puisse être réduite à un monôme* $O'I'$, *il faut et il suffit que l'on puisse choisir le point* O' *de façon que l'on ait* $K = (O' - O)I$. Pour cela, il faut que le vecteur I soit parallèle au plan du couple K. Le lieu du point O' est alors une parallèle menée à I, dans le plan du couple K. C'est le cas d'une forme $mAB + m'A'B', \ldots$, lorsque tous les points A, B, $A', B', \ldots$ sont dans un même plan; il suffit, pour s'en assurer, de prendre le point O dans ce plan.

4° *Pour que deux formes monômes* mOA, $m'O'A'$ *soient égales, il faut et il suffit que les segments* OA, $O'A'$ *soient comptés sur la même droite et liés par la relation algébrique* $mOA = m'O'A'$.

Ainsi, le monôme mOA représente la droite indéfinie OA munie d'un sens et d'une masse égale à m fois la longueur OA.

III. *Remarques.* — 1° La méthode de réduction se simplifie dans le cas de droites concourantes ou paral-

lèles, comme le montrent les égalités

$$(1)\quad m_1 A\, I_1 + m_2 A\, I_2 + \ldots = A(m_1 I_1 + m_2 I_2 + \ldots) = AI,$$
$$(2)\quad m_1 A_1 I + m_2 A_2 I + \ldots = (m_1 A_1 + m_2 A_2 + \ldots) I = mGI.$$

2° Cette dernière formule, appliquée au cas où les deux formes $m_1 A_1 I$, $m_2 A_2 I$ représentent deux segments qui tendent à devenir égaux, parallèles et de sens contraire, permet d'envisager le couple comme la droite de l'infini d'un plan parallèle au plan du couple.

3° Ce numéro constitue une théorie de la Statique des corps solides, pourvu qu'on parte du théorème des vitesses virtuelles. Si, en effet, AB est une force appliquée au point A du corps et PQ une vitesse de rotation, PQAB dt est le travail de AB pour cette rotation et dans le temps dt. Le théorème des vitesses virtuelles donne pour la condition d'équilibre, en supprimant le facteur dt commun à tous les termes,

$$PQAB + PQA'B' + \ldots = 0.$$

Cette égalité fait rentrer la théorie des forces dans celle des formes du deuxième ordre.

21. Formes du troisième ordre. — I. *Réduction.* — La forme du troisième ordre s'écrit

$$F = m_1 A_1 B_1 C_1 + m_2 A_2 B_2 C_2 + \ldots.$$

Je transforme chaque monôme ainsi :

$$mABC = mA(B-A)(C-A) = m(A-O+O)(B-A)(C-A),$$

O étant un point arbitrairement choisi. Je désigne le couple $m(B-A)(C-A)$ par K et le produit $(A-O)K$ par V. Il vient

$$mABC = OK + V.$$

La forme F s'écrira donc

$$\begin{aligned} F &= OK_1 + V_1 + OK_2 + V_2 + \ldots \\ &= O(K_1 + K_2 + \ldots) + (V_1 + V_2 + \ldots). \end{aligned}$$

Les sommes entre parenthèses sont égales respectivement à un couple K et à un produit de trois vecteurs V. Dès lors, on a

$$F = OK + V.$$

Deux cas se présentent :

Premier cas : $K = 0$. — La forme est égale à un produit de trois vecteurs V.

Deuxième cas : $K \gtrless 0$. — Je peux poser $V = IK$, I étant un vecteur. Alors

$$F = (O + I)K = ABC,$$

A étant le point $O + I$; B et C, tels que

$$(B - A)(C - A) = K.$$

Ainsi la forme F se réduit au triangle ABC. Celui-ci est dans le plan mené par le point $O + I$, parallèle à celui du couple K, de même sens et de même aire que ce couple.

II. *Conséquences.* — 1° *Pour que deux formes monômes* ABC, A′B′C′ *soient égales, il faut et il suffit que les triangles* ABC, A′B′C′ *soient dans le même plan, de même sens et de même aire.*

Ainsi la forme du troisième ordre réductible au monôme ABC représente un plan muni d'un sens et d'une aire, ceux du triangle ABC.

2° La somme de deux monômes ABC + A′B′C′, dont les plans sont parallèles, peut s'écrire

$$mOK + m'O'K = (mO + m'O')K,$$

en désignant par K le couple unité parallèle à la direction commune des deux plans. La dernière forme représente un plan de masse $m + m'$ et qui partage la dis-

tance des deux plans ABC, A′B′C′ dans le rapport $-\frac{m'}{m}$.
Si l'aire m' du triangle A′B′C′ tend vers $-m$, ce plan est rejeté à l'infini. D'autre part, la somme est, dans ce cas, égale à $m(O - O')K = V$, produit de trois vecteurs. On peut donc dire que le produit de trois vecteurs représente un plan à l'infini. Mais il le représente avec un coefficient égal au volume du tétraèdre V. Comme toute trace de la direction des plans donnés a disparu, on peut regarder tous les produits de trois vecteurs comme représentant un plan unique à l'infini. C'est ce qu'on appelle le *plan de l'infini*.

3° On pourra faire abstraction de la forme triangulaire qu'on a jusqu'ici supposée à l'aire dont est affecté chaque plan : la seule chose qui importe, c'est son étendue et son sens, c'est-à-dire le sens dans lequel un mobile parcourt le contour de cette surface.

22. La forme du quatrième ordre, représentant une somme de volumes, pourra être remplacée par un monôme ; ce sera un volume égal à cette somme. On pourra, d'ailleurs, faire abstraction de la forme tétraédrique de ces volumes.

IV. — Coordonnées. Déterminants. Homographie. Dualité. Produits d'ordre quelconque.

23. Coordonnées. Déterminants. — 1° Soit un point O appelé origine, puis trois vecteurs I_1, I_2, I_3 non parallèles à un même plan et appelés *vecteurs coordonnés*. Tout point X pourra s'écrire

$$(1) \qquad X = O + x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_3,$$

x_1, x_2, x_3 étant les valeurs algébriques des composantes du vecteur $-O + X$, suivant les vecteurs I_1, I_2, I_3 dont

les longueurs servent d'unité de mesure pour chacune de ces composantes. A chaque point X répond un système déterminé de nombres x_1, x_2, x_3, et réciproquement. Quand les trois vecteurs I_1, I_2, I_3 ont pour longueur l'unité, ces nombres sont les *coordonnées cartésiennes* du point X.

2° Dans la formule (1), je pose

$$I_1 = A_1 - O, \qquad I_2 = A_2 - O, \qquad I_3 = A_3 - O.$$

De plus, pour la symétrie des notations, je remplace O par A_4 et je désigne par x_4 le coefficient

$$1 - x_1 - x_2 - x_3$$

de ce point. La formule (1) devient

$$(2) \qquad X = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4.$$

Le tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$ est le *tétraèdre coordonné*. Il est arbitraire comme le système $OI_1 I_2 I_3$; x_1, x_2, x_3, x_4 sont les *coordonnées* tétraédriques du point X. Leur somme est égale à 1. Si elle était m, X représenterait un point de masse m. Les lettres A de la formule (2), au lieu de représenter des points simples, pourraient aussi représenter des points affectés de masses.

3° Dans le système des coordonnées tétraédriques, le plan se présente sous la forme

$$\begin{aligned} \xi &= PQR \\ &= (p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3 + p_4 A_4)(q_1 A_1 + \ldots)(r_1 A_1 + \ldots). \end{aligned}$$

Ce produit développé sera une somme de quatre termes, tels que

$$x_1 A_2 A_3 A_4 = x_1 \alpha_1,$$

x_1 étant un nombre et α_1 un plan muni d'une aire qui peut n'être pas égale à l'unité. Le nombre x_1 est le

coefficient de $A_2 A_3 A_4$ dans le produit

$$(p_2 A_2 + p_3 A_3 + p_4 A_4)(q_2 A_2 + q_3 A_3 + q_4 A_4)(r_2 A_2 + r_3 A_3 + r_4 A_4).$$

C'est la *valeur du déterminant*

$$\begin{vmatrix} p_2 & p_3 & p_4 \\ q_2 & q_3 & q_4 \\ r_2 & r_3 & r_4 \end{vmatrix}.$$

On voit s'imposer ici la méthode d'exposition des déterminants telle que je l'ai donnée antérieurement. Le plan ξ sera représenté par la somme de quatre termes

$$\xi = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 + x_4 \alpha_4.$$

x_1, x_2, x_3, x_4 sont les *coordonnées tangentielles* du plan ξ.

24. Homographie et dualité. — 1° A quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 pris dans une première figure, faisons correspondre quatre points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 d'une autre figure; ces symboles pouvant, d'ailleurs, représenter des points avec des masses. A tout point de la première figure

$$(1) \qquad X = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4$$

répond un point de la deuxième figure

$$(2) \qquad X' = x_1 A'_1 + x_2 A'_2 + x_3 A'_3 + x_4 A'_4,$$

et réciproquement. Les deux figures sont dites *homographiques*.

2° Aux quatre points faisons correspondre, non plus quatre points, mais quatre plans $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. A chaque point X de la première figure répond un plan

$$(3) \qquad \xi = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 + x_4 \alpha_4,$$

et réciproquement. Les plans de la deuxième figure sont

homographiques des points de la première. A toute propriété des points de la première figure répondra, comme nous allons voir, une propriété des plans de la deuxième. C'est le *principe de dualité*.

25. Extension du calcul des formes. Produits de plans. — Par la méthode du n° **24**, je fais correspondre un plan α à chaque point A. A toute forme de points, par exemple $m\text{AB} + m'\text{A}'\text{B}'$, ..., répond une forme de plans $m\alpha\beta + m'\alpha'\beta'$, ... Je dois regarder deux formes de plans comme *égales* si les deux formes de points correspondantes sont égales. La forme de plans représente l'entité commune à tous les ensembles de plans ainsi obtenus. D'après cette définition, toutes les règles pour le calcul des formes de points s'appliquent aux formes de plans. Donc à toute propriété d'une figure représentée par une égalité entre des formes de points répond une propriété représentée par la même égalité entre les formes correspondantes de plans. C'est le principe de dualité. Il nous permet d'étendre aux formes de plans les résultats du n° **3**. D'un autre côté, l'homographie n° **24** permet de remplacer un vecteur par un point à distance finie et un couple par un plan à distance finie. Comme l'homographie est intimement liée à la dualité, il n'y a pas lieu de distinguer, dans des énoncés généraux, ces éléments qui peuvent être substitués l'un à l'autre. On arrive ainsi aux énoncés suivants :

1° *Une forme de plans du premier ordre*

$$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \ldots$$

est réductible à un monôme (**19**).

Ce résultat est, d'ailleurs, connu directement (**21**).

2° *Une forme de plans du deuxième ordre*

$$m_1\alpha_1\beta_1 + m_2\alpha_2\beta_2 + \ldots$$

est réductible à un binôme (**20**).

3° *Une forme de plans du troisième ordre*

$$m_1 \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 + m_2 \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 + \ldots$$

est réductible à un monôme (**21**).

4° *Une forme de plans du quatrième ordre est réductible à un monôme* (**22**).

On sait que la première de ces formes représente un plan muni d'un sens et d'une aire. Je vais maintenant rechercher ce que représentent les trois autres formes réduites chacune à un monôme. Je m'appuierai sur le théorème suivant :

26. Théorème fondamental. — *Pour que deux formes monômes de même espèce et qui ne sont pas nulles ne diffèrent que par leurs masses, il faut et il suffit que les facteurs de l'une soient des fonctions linéaires des facteurs de l'autre. Le rapport des masses est égal au déterminant des coefficients.*

1° La condition est nécessaire. Soit, par exemple,

$$AA' = m A_1 A_2.$$

En multipliant par A les deux membres, j'ai

$$0 = m A A_1 A_2.$$

Comme, par hypothèse, m n'est pas nul, cette condition exige que le point A soit sur $A_1 A_2$. On en conclut facilement que A est fonction linéaire de A_1 et A_2. De même A′ est une fonction linéaire de A_1 et A_2.

2° Soit

$$A = m_1 A_1 + m_2 A_2,$$
$$A' = m'_1 A_1 + m'_2 A_2.$$

Je multiplie ces deux égalités membre à membre. Il vient

$$AA' = m A_1 A_2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

m est la *valeur du déterminant*

$$\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ m'_1 & m'_2 \end{vmatrix}.$$

C'est ici que la notion de déterminant, telle que je l'ai donnée ([1]), s'impose vraiment. Elle se présente comme le rapport de deux volumes, de deux aires situées dans le même plan, de deux segments comptés sur la même droite.

27. Formes monomes de plans. — Considérons, par exemple, le produit de deux plans qui se coupent $\alpha_1 \alpha_2$. Pour qu'un autre produit $\alpha\alpha'$ soit égal au premier, il faut et il suffit que l'on ait (25 et 26)

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha = m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2, \\ \alpha' = m'_1 \alpha_1 + m'_2 \alpha_2, \end{cases} \qquad m_1 m'_2 - m'_1 m_2 = 1.$$

Les plans α et α' sont donc deux plans pivotant d'une façon arbitraire autour de l'intersection des plans α_1 et α_2. Voilà pour les positions. Pour les masses, soit O un point commun aux quatre plans. Le plan α, par exemple, est égal au produit OK du point O par un couple déterminé K que j'appelle le *couple du plan* α. Les égalités (1), écrites avec cette notation, contiennent le point O en facteur. En supprimant ce facteur, on obtient les égalités équivalentes (18, 4°)

$$(2) \qquad \begin{cases} K = m_1 K_1 + m_2 K_2, \\ K' = m'_1 K_1 + m'_2 K_2. \end{cases}$$

Ces égalités subsistent si l'on imagine que les lettres K représentent, non plus les couples eux-mêmes, mais

---

([1]) *Nouvelles Annales*, 3e série, t. X; mai 1891.

leurs axes (16). Dès lors, on a (26)

$$KK' = K_1 K_2$$

ou bien (18, 4°)

$$OKK' = OK_1 K_2.$$

Cette condition est suffisante, car la démonstration peut être remontée, toutes les propositions invoquées admettant la réciproque. On arrive ainsi aux conclusions suivantes :

1° *Le produit de deux plans* $\alpha\alpha'$ *représente leur droite d'intersection. Le sens et la masse de cette droite sont ceux de l'axe du couple* KK' *formé par les axes des couples des plans donnés.*

2° *Le produit de trois plans* $\alpha\alpha'\alpha''$ *représente leur point commun avec une masse égale au volume du tétraèdre* OKK'K'' *déterminé par les axes de leurs couples.*

D'après cela, la droite d'intersection de deux plans a pour masse un volume multiplié par une longueur. Le point d'intersection de trois plans a pour masse le carré d'un volume. Ils pourront donc se mettre respectivement sous les formes

$$ABCD.AB, \quad (ABCD)^2 A.$$

Le produit d'un plan par une droite pourra se mettre, à un facteur volume près, sous la forme $\alpha.\alpha'\alpha''$. Il représente leur intersection avec la masse qu'on sait calculer. Le produit de quatre plans pourra être regardé comme le produit de deux droites $\alpha\alpha'.\alpha''\alpha'''$. C'est le cube d'un volume.

28. Groupement des facteurs d'un produit. — Dans un produit de points qui ne dépasse pas le quatrième

ordre, on peut grouper à volonté les facteurs et les échanger en se conformant à la règle des signes. Il n'en est pas de même dans les produits d'ordre supérieur à quatre. Les expressions ABCD.E, A.BCDE, ABC.DE représentent des résultats très différents. Cette remarque s'applique, d'après le principe de dualité, à des produits où n'entrent que des plans. Avec cette remarque, un peu de réflexion permettra d'effectuer les transformations légitimes et d'éviter les fautes de calcul. On sera, d'ailleurs, toujours guidé par la Géométrie.

29. Méthode de réduction pour le calcul des formes. — Soit à réduire la forme $f(A, B, \ldots)$, où $A, B, \ldots$ représentent des points. A chaque point A, je fais correspondre un plan α (24). A $f(A, B, \ldots)$ répond la forme $f(\alpha, \beta, \ldots)$. Je transforme celle-ci en $f_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots)$. A cette dernière forme correspond, dans la première figure, la forme $f_1(A_1, B_1, \ldots)$. Celle-ci est égale à $f(A, B, \ldots)$ (25).

Le choix de la correspondance rend le calcul plus ou moins facile. Voici le système le plus avantageux ([1]) :

Soit un tétraèdre ABCD. A chaque sommet je fais correspondre la face opposée, mais avec une masse telle que le produit de ce sommet par cette face soit égal à $+1$. Ainsi :

à A correspond	$\alpha = (ABCD)^{-1} BCD$,	tel que	$A\alpha = 1$,
à B correspond	$\beta = (BACD)^{-1} ACD$,	tel que	$B\beta = 1$,
....		....	....

Par l'application du n° 27, on constate que cette propriété s'étend à tous les éléments du tétraèdre : à chaque élément du tétraèdre pris dans la première fi-

---

([1]) Il joue un rôle fondamental dans l'exposition de Grassmann.

gure répond, dans la deuxième, l'élément opposé du tétraèdre et avec une masse telle que le produit du premier élément par le second égale $+1$. Ainsi :

à AB correspond $\alpha\beta = (ABCD)^{-1}CD$, tel que $AB\alpha\beta = 1$,
à ABC correspond $\alpha\beta\gamma = (ABCD)^{-1}D$, tel que $ABC\alpha\beta\gamma = 1$,
....

La forme correspondante d'une forme quelconque de l'une ou l'autre figure se calcule aisément par cette règle.

Exemple. — Soit la forme ABC.AD. La forme correspondante de la deuxième figure est

$$(ABCD)^{-1}D(ADBC)^{-1}BC = (ABCD)^{-2}BCD.$$

En remontant à la première figure, on a (ABCD) A.

Par ce procédé, on peut obtenir un grand nombre de formules qu'on trouvera dans Grassmann avec des démonstrations plus pénibles. Il ne me paraît pas utile de s'en charger la mémoire. Le procédé s'applique aussi à l'étude des figures planes en remplaçant le tétraèdre par un triangle. Plus généralement, il s'applique, comme tout ce Mémoire, à un espace à n dimensions.

30. Mon exposition a dû être limitée aux fondements de la théorie. Elle suffit cependant pour faire voir, dans l'œuvre de Grassmann, une méthode de Géométrie à la fois synthétique et analytique. Je l'ai montré, elle embrasse les déterminants, la Mécanique, les coordonnées cartésiennes et tétraédriques, le principe de dualité, l'homographie et, par suite, les propriétés projectives des figures; mais elle n'est tributaire d'aucune de ces théories. Dans ce riche domaine, les applications sont en nombre infini. On en trouve un grand nombre dans

l'œuvre de Grassmann et dans les travaux de MM. Caspary et Peano. Je me réserve de revenir sur ce sujet.

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie des nombres; par *Édouard Lucas*. — Tome I : *Le calcul des nombres entiers. Le calcul des nombres rationnels. La divisibilité arithmétique*. 1 vol. gr. in-8° de xxxiv-520 pages. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. Prix : 15 fr.

L'existence scientifique d'Édouard Lucas, si prématurément enlevé à l'affection de sa famille et de ses amis, a été consacrée surtout à l'étude de l'arithmétique supérieure. A côté de recherches très intéressantes sur les autres branches des mathématiques, et d'œuvres de vulgarisation vraiment remarquables, il a produit, dans la plupart des recueils périodiques d'Europe et des États-Unis, de très nombreux travaux sur la théorie des nombres. Il était en correspondance avec les plus illustres représentants de cette science, si française par ses origines, et malheureusement si délaissée en France de nos jours.

Unissant au plus haut degré de grandes facultés d'invention à une érudition merveilleuse, il était préparé, mieux que personne, à la publication d'une œuvre comme celle que nous voulons analyser aujourd'hui, et qui est malheureusement la dernière sortie de sa plume, puisque la mort est venue le prendre quelques semaines à peine après l'apparition de ce premier volume.

En dehors des regrets que fait toujours éprouver la perte d'un esprit puissant et original, on pouvait être en droit de déplorer qu'une œuvre de cette valeur restât inachevée. Cependant, à ce point de vue spécial, il importe de constater deux faits; le premier, c'est que les manuscrits laissés par Lucas après sa mort, ainsi que ses nombreux mémoires sur la théorie des nombres, pourront permettre de constituer et de publier un second volume, assurément moins étendu que celui qu'il avait projeté, mais néanmoins suffisant pour compléter l'ou-

vrage sur les points essentiels; le second fait, c'est que le volume paru forme à lui seul une œuvre complète, et d'une valeur considérable, ainsi qu'on pourra s'en rendre compte, je l'espère, par l'exposé qui va suivre.

J'ai déjà eu l'occasion de dire, sous une forme trop concise peut-être, et au risque de ne pas me faire entièrement comprendre, que ce premier volume, en dépit de son titre, était moins le commencement d'une théorie des nombres qu'une introduction à cette science. C'est précisément là ce qui lui donne un caractère d'unité; c'est là ce qui fait qu'en dépit des apparences nous avons devant nous une œuvre formant un tout; moins achevée que si l'auteur avait pu y ajouter les compléments préparés dans son esprit, mais telle cependant que personne désormais ne pourra étudier la théorie des nombres et écrire sur ce sujet sans avoir lu et médité l'ouvrage d'Édouard Lucas.

Le livre débute par une préface contenant de précieuses indications historiques, et dans laquelle l'auteur établit la ligne de démarcation, essentielle selon lui, entre l'algèbre proprement dite et la théorie des nombres. C'est dans la notion de discontinuité qu'il trouve le caractère de cette dernière science.

Dans une remarquable introduction se trouve ensuite rapidement étudiée la filiation des idées arithmétiques, leurs origines et leurs applications. Ce n'est pas sans un certain étonnement que beaucoup de lecteurs s'apercevront que des théories, paraissant exclusivement abstraites au premier coup d'œil, sont souvent d'un intérêt pratique considérable, et peuvent même devenir d'un très grand secours pour des usages industriels.

Ainsi que l'indique le titre, reproduit en tête de cet article, l'ouvrage comprend trois grandes divisions ou *livres*. Le livre I traite des nombres entiers, et se divise en huit chapitres : addition des nombres entiers; soustraction des nombres entiers; multiplication des nombres entiers; division et classification des entiers; les nombres figurés; l'analyse combinatoire; la géométrie de situation; la multiplication algébrique.

Sur ces sujets, en apparence si simples, on trouvera, dans les chapitres que nous venons d'énumérer, une abondance de renseignements; nous citerons, en particulier, le triangle arithmétique, les tableaux de sommes et de différences, les systèmes de numération, la notion des congruences, les permutations

figurées, les échiquiers de M. Delannoy, les réseaux et régions.

Le livre II comprend dix chapitres, intitulés : les nombres fractionnaires; le calcul des probabilités; la division algébrique; les polynômes dérivés; le calcul symbolique; sommation des puissances numériques; les fonctions symétriques; les déterminants; les suites récurrentes linéaires; les fonctions numériques du second ordre. On y rencontre d'intéressantes propriétés des polynômes, des données générales sur les probabilités, sur l'interpolation, sur les dérivées des polynômes à une ou plusieurs variables; le calcul symbolique, dont Lucas a fait un si grand et si habile usage, est étudié avec beaucoup de soin, ainsi que les applications de ce calcul aux nombres de Bernoulli, et à plusieurs problèmes célèbres sur les permutations figurées; les sommations des puissances numériques constituent encore une application du calcul symbolique, et ramènent l'auteur aux nombres de Bernoulli et d'Euler, et aux suites de Cesaro. Le chapitre des fonctions symétriques résume les travaux les plus essentiels concernant cette belle théorie; de même, en ce qui concerne les déterminants et les équations linéaires. A propos des suites récurrentes, Lucas reproduit la substance de ses recherches sur les travaux de Léonard de Pise (Fibonacci) et sa remarquable théorie des fonctions numériques du second ordre U_n et V_n, qui offrent avec les fonctions circulaires de frappantes analogies. C'est une étude pleine de profondeur et d'originalité, qui lui appartient en propre, et qui peut devenir entre des mains habiles un instrument d'une grande puissance pour des recherches nouvelles. Nous croyons savoir que l'extension de ces fonctions au troisième ordre était l'un des rêves scientifiques de l'auteur; il fondait sur des recherches dans cette direction les plus belles espérances pour la découverte de nouvelles et importantes propriétés arithmétiques. Nous attirons sur ce point l'attention des jeunes géomètres qui se sentiraient tentés par l'étude de l'arithmétique supérieure, et voudraient se faire les continuateurs de Lucas.

Le livre III est plus exclusivement arithmétique que les précédents; il comprend : codiviseurs et comultiples; les nombres premiers; les diviseurs des nombres; de l'indicateur; les restes; les fractions continues.

Nous ne saurions assez recommander l'emploi de ces termes de codiviseurs et comultiples que propose ici Lucas, et qui,

nous l'espérons, deviendront bientôt d'un usage courant. Sur la distribution des nombres premiers, l'auteur donne un résumé des connaissances, bien peu étendues malheureusement, qui sont aujourd'hui acquises à la science; la divisibilité des factorielles, les beaux théorèmes de MM. Tchebycheff et de Polignac, les nombres parfaits, aliquotaires, amiables, les diviseurs des nombres, les théorèmes de Dedekind, Liouville et Dirichlet sont présentés par lui sous une forme concise et très claire cependant.

L'indicateur, suivant l'heureuse expression de Cauchy, est l'expression $\varphi(n)$ du nombre des entiers 1, 2, ..., n qui sont premiers à n. C'est une notion très intéressante en théorie des nombres, et que Lucas étudie avec grand soin, en la généralisant à divers points de vue. On verra figurer dans ce chapitre des théorèmes d'un grand intérêt, parmi lesquels plusieurs sont inédits et ne pourraient se trouver dans aucun autre ouvrage. Le chapitre des restes comprend une première étude sommaire des congruences, et de nombreuses applications, parmi lesquelles nous retenons les théorèmes de Fermat, de Wilson, de Staudt et Clausen, etc. La théorie des fractions continues est rapidement étudiée en elle-même, pour arriver aussitôt à des applications arithmétiques, et spécialement à l'intercalation et à la médiation des suites, et à l'analyse indéterminée du premier degré.

Des *notes et additions,* terminant le volume, se rapportent : à la partition des polygones; aux problèmes des rencontres et des ménages; aux nombres d'Hamilton; aux réseaux d'un quinconce; à la sommation des indicateurs; aux permutations circulaires avec répétition; aux restes du triangle arithmétique; aux nombres de Clausen et de Staudt; à l'extraction des racines, et aux réduites intermédiaires.

Un des caractères particuliers de l'ouvrage dont il s'agit consiste dans l'abondance extraordinaire des questions traitées ou indiquées sous le titre d'*exemples.* A tout instant, on voit énoncer des applications variées, souvent inattendues; un développement sobre, au besoin quelques lignes seulement, apprennent au lecteur où en est l'état actuel de la question qu'on vient d'indiquer. Pour employer une comparaison élégante formulée par l'un des amis de l'auteur, et que nous avons recueillie, il semble qu'on visite un bel édifice, et qu'à chaque pas des fenêtres présentent à vos yeux des paysages variés, pleins

d'attrait, aux horizons plus ou moins lointains, et dont l'aspect provoque à des excursions nouvelles.

Lucas n'avait certes pas la prétention de dire le dernier mot sur la théorie des nombres; il savait, au contraire, combien est encore immense le champ des vérités arithmétiques inconnues. Mais il aimait cette science avec passion; il lui avait consacré la meilleure part de sa vie scientifique; et sa grande ambition était de la faire aimer et connaître.

Si parmi la jeune génération de savants français, qui a l'avenir devant elle, il s'en trouve quelqu'un pour essayer de reprendre la tradition si tristement interrompue, il contribuera à la gloire scientifique de notre pays, et rendra du même coup le plus juste hommage à la mémoire d'un géomètre dont les travaux n'ont pas été appréciés de son vivant à leur véritable valeur, mais que sa *Théorie des nombres* classe parmi les maîtres de la science.

C.-A. LAISANT.

SUR LE QUADRILATÈRE;

PAR M. F. FARJON.

1. Soit ABCD un quadrilatère gauche. De deux sommets consécutifs A et B, menons des plans respectivement perpendiculaires aux côtés opposés BC et AD. Ces plans se couperont suivant une droite I_1 parallèle à la plus courte distance des deux droites BC et AD. Construisons de la même façon les trois autres droites I_2, I_3, I_4.

Ces quatre droites sont situées dans un même plan P_1 *perpendiculaire à la droite* RS *qui joint les milieux des deux diagonales* AC *et* BD.

Nous appellerons le plan P_1 *plan orthique* du quadrilatère ACBD.

On voit que la droite qui joint les milieux des dia-

gonales est perpendiculaire aux deux plus courtes distances des couples de côtés opposés.

2. Les quatre points A, B, C, D déterminent deux autres quadrilatères gauches ACBD et ABDC.

Chacun d'eux a un plan orthique perpendiculaire, le premier P_2 à la droite MN qui joint les milieux de AB et de DC, le second P_3 à la droite PQ qui joint les milieux de AD et de BC.

Les trois droites MN, PQ, RS se rencontrent au centre de gravité G du quadrilatère.

Les trois plans P_1, P_2, P_3 forment un angle trièdre de sommet Σ, que nous appellerons *centre orthique* du tétraèdre ABCD. Ce trièdre a ses arêtes respectivement parallèles aux plus courtes distances des couples d'arêtes opposées du tétraèdre. Le trièdre G, formé par les médianes MN, PQ, RS, est son supplémentaire.

3. Marquons, sur deux côtés opposés BC, AD du premier quadrilatère, deux points K et L, divisant ces côtés en parties proportionnelles. Si, de chacun des points K et L, on mène un plan perpendiculaire sur le côté opposé, l'intersection de ces plans sera située dans le plan P_1, ainsi :

Le plan orthique est le lieu des intersections deux à deux des plans menés perpendiculairement aux côtés opposés du quadrilatère par les points divisant ces côtés en parties proportionnelles.

4. Autrement :

Si l'on considère deux génératrices rectilignes de même système d'un paraboloïde hyperbolique, et que, par chacun des deux points où une génératrice

quelconque du second système rencontre ces deux directrices, on mène un plan perpendiculaire à la directrice opposée, l'intersection de ces deux plans, parallèle à la plus courte distance des deux directrices, sera constamment située dans un même plan perpendiculaire à l'axe de la surface.

Ce plan, plan orthique de l'un quelconque des quadrilatères que forment deux couples de génératrices de systèmes contraires, sera le *plan orthique* du paraboloïde.

5. Le plan orthique du paraboloïde passe à une distance du sommet égale à la différence des paramètres des deux paraboles principales.

6. Il résulte de ce qui précède que :

Le lieu des points du paraboloïde, où les génératrices de systèmes opposés se coupent à angle droit, est l'hyperbole suivant laquelle le plan orthique coupe la surface.

7. Problème. — *Construire le sommet et l'axe du paraboloïde hyperbolique déterminé par un quadrilatère gauche donné.*

L'axe est parallèle à la droite qui joint les milieux des diagonales. Que l'on coupe la figure par un plan perpendiculaire à cette droite ; les quatre points où ce plan rencontre les côtés du quadrilatère, et le point où il rencontre une cinquième génératrice, par exemple la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés, déterminent une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux deux génératrices qui se croisent au sommet de la surface, et la direction de ces asymptotes s'ob-

tiendra par une construction connue (Chasles, *Sect. con.*, § 13).

Cela fait, par deux côtés opposés du quadrilatère, on conduira deux plans parallèles à celle de ces deux asymptotes qui n'est pas parallèle à leur plan directeur; l'intersection de ces deux plans sera l'une des génératrices passant par le sommet. On obtiendra de même la seconde et, par suite, le sommet lui-même et l'axe du paraboloïde.

8. La droite MN qui joint les milieux des côtés opposés AB et CD appartient à la fois au système des droites divisant en parties proportionnelles les côtés AB et DC du quadrilatère ABCD et les côtés AB et CD du quadrilatère ABDC. Il en résulte que l'intersection des deux plans menés perpendiculairement de M sur CD et de N sur AB appartient aux deux plans orthiques P_1 et P_3 : elle est donc leur intersection. Ainsi les arêtes du trièdre Σ ne sont autre chose que les intersections deux à deux des plans menés des milieux de chacune des arêtes du tétraèdre ABCD perpendiculairement à l'arête opposée. Il s'ensuit que :

Ces six plans se coupent en un même point qui est le centre orthique du tétraèdre.

Cette proposition se démontre, d'ailleurs, directement sans difficulté.

9. Le centre orthique est le symétrique du centre de la sphère circonscrite au tétraèdre par rapport au centre de gravité.

Il est le centre de l'hyperboloïde gauche déterminé par les quatre hauteurs du tétraèdre (*théorème de Monge*).

10. Les deux paraboloïdes hyperboliques déterminés

par les quadrilatères ABCD, ABDC, ont trois génératrices communes : les deux droites AB et CD du premier système et la droite MN du second. Ils sont tangents en M et en N, ainsi :

Les trois paraboloïdes hyperboliques déterminés par les trois couples d'arêtes opposées d'un tétraèdre ont deux à deux un double contact aux points milieux des arêtes opposées.

Ces trois surfaces ont cinq points communs A, B, C, D et G.

Deux quelconques ont cinq points communs et deux plans tangents communs.

11. Il est intéressant de voir ce que donnent les propositions précédentes lorsque le quadrilatère ABCD devient plan.

On retrouve tout d'abord ce théorème connu : que les points de concours des hauteurs des quatre triangles que forment les côtés du quadrilatère prolongés sont sur une même droite L_1 perpendiculaire à la droite RS qui joint les milieux des diagonales. L_1 est l'*axe orthique* du quadrilatère.

12. Les quatre points A, B, C, D déterminent deux autres quadrilatères ACBD, ABDC qui ont chacun leur axe orthique L_2, L_3.

Ces trois droites L_1, L_2, L_3 forment un triangle $\alpha\beta\gamma$. Ici le centre orthique est à l'infini.

13. *Le centre de gravité des points de concours des hauteurs des douze triangles qui ont pour sommets les points de rencontre des côtés opposés et des diagonales du quadrilatère, et pour bases les côtés et les*

diagonales, coïncide avec le centre de gravité du triangle $\alpha\beta\gamma$.

14. *L'axe orthique* L_1 *est le lieu des points de concours des hauteurs de deux séries de triangles qui ont pour sommets les points de rencontre des couples de côtés opposés* AD *et* BC, AB *et* DC, *et pour bases des droites divisant ces mêmes côtés en parties proportionnelles.*

Propriété analogue pour les axes L_2 et L_3.

15. La droite MN qui joint les milieux de deux côtes opposés se trouve faire partie de deux systèmes de division, en sorte que les perpendiculaires abaissées du point M sur CD et du point N sur AB se coupant en même temps sur l'axe L_1 et sur l'axe L_3 se coupent à l'intersection β de ces axes.

De même pour les sommets α et γ.

16. *Si le quadrilatère* ABCD *est inscriptible au cercle, les axes* L_1, L_2, L_3 *passent respectivement par les points de rencontre des diagonales et des couples de côtés opposés.*

17. Et réciproquement : *Si cette condition est remplie pour l'un des axes* L_1, L_2 *ou* L_3, *le quadrilatère est inscriptible.*

18. Il en résulte que :

Si le quadrilatère est inscriptible, les trois droites L_1, L_2, L_3 *concourent en un même point, centre orthique du quadrilatère.*

Ce point est le symétrique du centre du cercle par rapport au centre de gravité du quadrilatère.

Ce théorème s'établit d'ailleurs directement de la façon la plus simple.

19. Réciproquement, *si les trois axes* L_1, L_2, L_3 *concourent en un même point, le quadrilatère est inscriptible.*

20. Cette propriété caractéristique du quadrilatère inscriptible est exprimée analytiquement par la formule donnée précédemment (*Question* 1589, t. VII, 3e série, p. 502).

DÉMONSTRATION ANALYTIQUE DU THÉORÈME DE M. ROUCHÉ RELATIF A UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DU PREMIER DEGRÉ;

PAR M. E. AMIGUES.

Soit à résoudre m équations à n inconnues, et soit p l'ordre du déterminant principal. Le nombre des dédéterminants caractéristiques est $m-p$. S'il est nul, on ajoutera au système une équation à coefficients nuls, qui n'altérera pas les solutions du système.

Supposons que l'on place en haut les p équations qui fournissent le déterminant principal, et représentons par δ_{p+i} le déterminant caractéristique fourni par l'équation de rang $p+i$.

En ordonnant δ_{p+1} par rapport aux éléments de sa dernière colonne, savoir les termes indépendants g_1, g_2, ..., on obtient

$$\delta_{p+1} = G_1 g_1 + G_2 g_2 + \ldots + G_{p+1} g_{p+1},$$

g_{p+1} n'étant pas nul, puisqu'il est le déterminant principal.

Multipliant les $p+1$ premières équations respectivement par $G_1, G_2, \ldots, G_{p+1}$, et ajoutant, on a une équation qui peut remplacer la $(p+1)^{\text{ième}}$ sans altérer les solutions du système (parce que $G_{p+1} \neq 0$).

Dans cette équation, le coefficient d'une inconnue quelconque est un déterminant d'ordre $p+1$ formé avec les éléments du rectangle et par conséquent est nul. On voit alors facilement que l'équation qui remplace la $(p+1)^{\text{ième}}$ est

$$\delta_{p+1} = 0.$$

De même, dans ce nouveau système, on a le droit de remplacer la $(p+2)^{\text{ième}}$ des équations proposées par

$$\delta_{p+2} = 0,$$

et ainsi de suite.

Donc : tout système du premier degré est équivalent à un second système formé en prenant les équations qui fournissent le déterminant principal et en égalant à 0 les déterminants caractéristiques qui correspondent à toutes les autres équations.

On déduit de là les conclusions suivantes :

1° Si les déterminants caractéristiques ne sont pas tous nuls, pas de solution.

2° S'ils sont tous nuls, le système se réduit aux p premières équations proposées, et l'on peut en tirer les p inconnues qui correspondent au déterminant principal, par la règle de Cramer, en fonction des autres inconnues, au nombre de $n-p$ qui demeurent arbitraires. Si aucun des déterminants d'ordre p fournis avec les éléments du rectangle n'est nul, le nombre de manières dont on peut appliquer la règle de Cramer est visiblement $C_m^p\, C_n^p$.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES DU CONCOURS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1891;

Par M. J. LEMAIRE,
Ancien élève de l'École Polytechnique,
Professeur au lycée de Douai.

On donne une parabole P; *on porte à partir de chacun de ses points et dans les deux sens, sur une parallèle à une direction fixe* Δ, *des longueurs égales à la distance de ce point au foyer de la parabole.*

1° *Trouver le lieu des extrémités de ces longueurs; montrer qu'il se compose de deux paraboles* P_1 *et* P_2 *et donner la raison de ce dédoublement;*

2° *Démontrer que les axes des paraboles* P_1 *et* P_2 *sont perpendiculaires l'un sur l'autre, qu'ils pivotent autour d'un point indépendant de la direction* Δ, *et que, quelle que soit cette direction, la somme des carrés des paramètres des deux paraboles est constante.*

3° *Trouver et construire le lieu décrit par les sommets des paraboles* P_1 *et* P_2 *lorsqu'on fait varier la direction* Δ.

I. Soient (*fig.* 1)

F le foyer de la parabole donnée P,
X'X son axe,
Y'Y sa directrice,
θ l'angle aigu de Δ avec X'X,
M un point quelconque de la courbe,
M_1 le point obtenu en prenant $MM_1 = MF$ sur la parallèle à Δ, menée par M,
MD la perpendiculaire menée de M à Y'Y.

M est le centre d'un cercle tangent en D à Y'Y et passant par F et M_1.

Joignons FD, FM_1, DM_1; nous avons

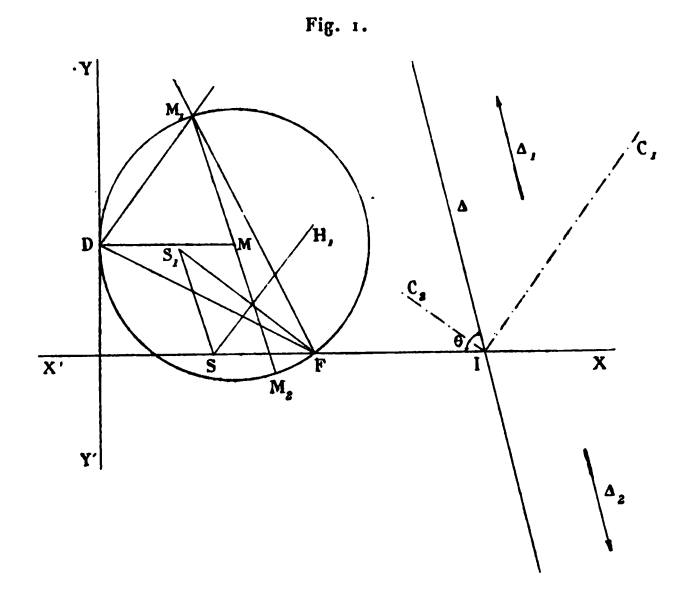
$$\widehat{YDM_1} = \frac{\widehat{DMM_1}}{2} = \frac{\theta}{2}$$

et aussi

$$\widehat{DFM_1} = \frac{\theta}{2}.$$

DM_1 et FM_1 sont les rayons correspondants de deux faisceaux homographiques; M_1 décrit donc une conique

Fig. 1.



passant par F et par le point à l'infini dans la direction DM_1, c'est-à-dire dans la direction de la bissectrice IC_1 de $\widehat{\Delta IX}$. Le point M_1 ne sera rejeté à l'infini que si DM_1 est elle-même à l'infini; la conique lieu de M_1 a donc

une asymptote rejetée à l'infini ; c'est, par suite, une parabole : appelons-la P_1.

Soit M_2 le point obtenu en prenant $MM_2 = MF$ sur la parallèle à Δ_2 menée par M. On verrait, comme ci-dessus, que le lieu de M_2 est une parabole P_2 dont la direction asymptotique est la bissectrice IC_2 de $\widehat{\Delta I X'}$.

II. Les diamètres des paraboles P_1 et P_2 étant respectivement parallèles aux bissectrices des angles $\widehat{\Delta I X}$ et $\widehat{\Delta I X'}$ ont des directions rectangulaires.

Soient S le sommet de P, S_1 le point correspondant de P_1.

Le diamètre de P_1 qui passe par S est la bissectrice SH_1 de $\widehat{S_1 S F}$. Le triangle SS_1F étant isoscèle, les points F et S_1 sont symétriques par rapport à ce diamètre ; comme ces deux points appartiennent à P_1, SH_1 est l'axe même de cette parabole.

Ceci démontre que l'axe de P_1 passe par le sommet de la parabole donnée ; il en est de même de l'axe de P_2.

Soient (*fig.* 2) AB la corde de P menée par F parallèlement à Δ, C le pôle de cette droite par rapport à P : ce point est sur la directrice $Y'Y$ et CA et CB sont rectangulaires ; CF et AB sont aussi rectangulaires.

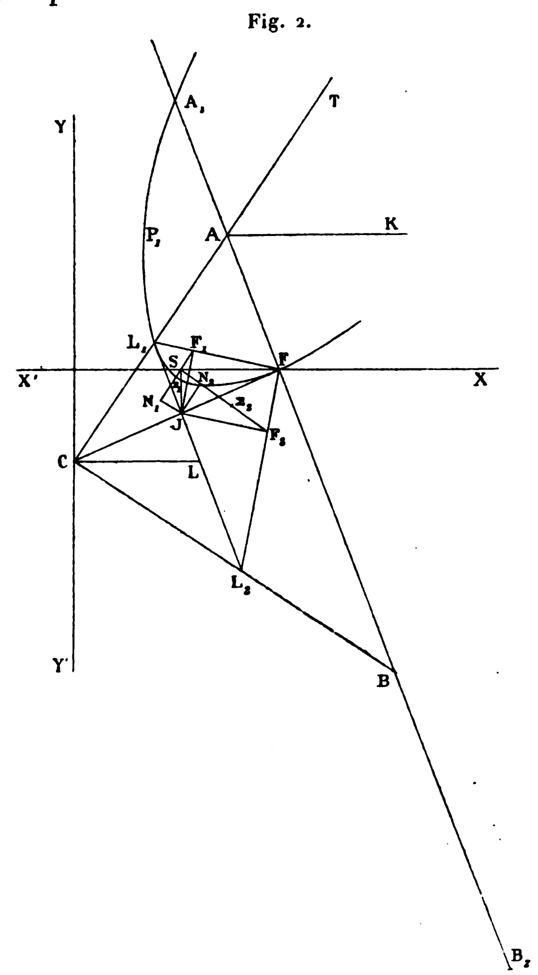
Soit AK la parallèle à $X'X$ menée par A.

La tangente en A à P, étant bissectrice de $\widehat{A_1 A K}$, est parallèle à IC_1 et, par suite, diamètre de P_1 ; le point de P_1 situé sur ce diamètre est le milieu L_1 de CA : c'est le point correspondant au point de contact L de P et de la tangente à cette courbe parallèle à Δ.

L_1 étant le milieu de CA, le point C est le pôle de

A_1F par rapport à P_1 ; il en résulte que CF est tangente à P_1 au point F.

Fig. 2.



C est de même le pôle de B_2F par rapport à P_2 et CF est tangente à P_2 au point F.

Nous voyons que *les paraboles* P_1 *et* P_2 *sont tan-*

gentes en F, et que *le point* C *a la même polaire par rapport aux trois paraboles* P, P_1, P_2.

Si L_2 est le milieu de CB, L_1L_2 est tangente à la fois aux trois courbes.

Soit J le point commun à L_1L_2 et à CF; ces deux droites sont perpendiculaires.

Donc J appartient à la directrice de chacune des paraboles P_1 et P_2; comme d'ailleurs J est sur la tangente à P en son sommet, puisque ce point est la projection de F sur une tangente à cette parabole, on en conclut que *le lieu du point de rencontre des directrices de* P_1 *et* P_2, *quand* Δ *varie, est la tangente à la parabole donnée en son sommet.*

Ces diverses remarques permettent de terminer facilement la question :

J appartenant à la directrice de P_1 et la polaire de ce point, par rapport à cette courbe, étant L_1F, le foyer de P_1 est le pied F_1 de la perpendiculaire menée de J à L_1F.

Joignons F_1S : cette droite est l'axe de P_1 et est parallèle à CA; la perpendiculaire JN_1 menée de J à FS est la directrice de P_1.

De même, le foyer de P_2 est le pied F_2 de la perpendiculaire menée de J à FL_2, l'axe de P_2 est F_2S et sa directrice la perpendiculaire JN_2 à SF_2.

JSF_1FF_2 est inscriptible dans le cercle de diamètre JF.

Les triangles JN_1F_1, JN_2F_2, JSF sont semblables et donnent

$$\frac{N_1F_1}{JF_1} = \frac{N_2F_2}{JF_2} = \frac{SF}{JF},$$

ou, en désignant par p, p_1, p_2 les paramètres des paraboles P, P_1, P_2,

$$\frac{p_1}{JF_1} = \frac{p_2}{JF_2} = \frac{p}{2JF},$$

d'où

$$p_1^2 + p_2^2 = \frac{p^2}{4} \times \frac{\overline{JF_1}^2 + \overline{JF_2}^2}{\overline{JF}^2}.$$

JF_1FF_2 est un rectangle ; par suite,

$$\overline{JF_1}^2 + \overline{JF_2}^2 = \overline{JF}^2.$$

Par conséquent,

$$p_1^2 + p_2^2 = \frac{p^2}{4} = \text{const.}$$

III. Le sommet de P_1 est le milieu Σ_1 de N_1F_1. Cherchons le lieu de Σ_1 quand Δ varie. Posons

$$S\Sigma_1 = -\rho, \qquad F_1SF = \omega,$$

et cherchons une relation entre ρ, ω, p : cette relation sera l'équation du lieu cherché en coordonnées polaires, l'origine étant S et la direction positive de l'axe polaire SX.

Nous avons successivement

$$S\Sigma_1 = \tfrac{1}{2}(SN_1 - SF_1),$$

$$\begin{aligned} SN_1 &= SJ \sin\omega = SF \cot\widehat{SJF} \sin\omega \\ &= \frac{p}{2} \cot\widehat{YCF} \sin\omega = \frac{p}{2} \cot 2\,\widehat{YCA} \sin\omega \\ &= \frac{p}{2} \cot 2\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \sin\omega = -\frac{p}{2} \cot 2\omega \sin\omega. \end{aligned}$$

Le triangle SF_1F donne

$$\begin{aligned} \frac{SF_1}{SF} &= \frac{\sin\widehat{SFF_1}}{\sin\widehat{SF_1F}} = \frac{\sin\left(\widehat{L_1FC} - \widehat{SFJ}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \widehat{SF_1J}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\widehat{L_1CY} - \widehat{JCL}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \widehat{SFJ}\right)} = \frac{\sin\left(\widehat{L_1CY} - \widehat{JCL}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \widehat{JCL}\right)}. \end{aligned}$$

Comme

$$\widehat{L_1CY} = \frac{\pi}{2} - \widehat{L_1CL} = \frac{\pi}{2} - \omega$$

et

$$\widehat{JCL} = \frac{\pi}{2} - 2\widehat{L_1CY} = 2\omega - \frac{\pi}{2},$$

on en conclut

$$\frac{SF_1}{SF} = \frac{\sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) - \left(2\omega - \frac{\pi}{2}\right)\right]}{\sin 2\omega} = \frac{\sin 3\omega}{\sin 2\omega},$$

d'où

$$SF_1 = \frac{p}{2}\,\frac{\sin 3\omega}{\sin 2\omega}.$$

Remplaçant, dans l'expression de $S\Sigma_1$, SN_1 et SF_1 par leurs valeurs, nous obtenons

$$S\Sigma_1 = \frac{p}{4}\left[-\cot 2\omega \sin\omega - \frac{\sin 3\omega}{\sin 2\omega}\right].$$

Remplaçant $S\Sigma_1$ par $-\rho$ et simplifiant, nous avons

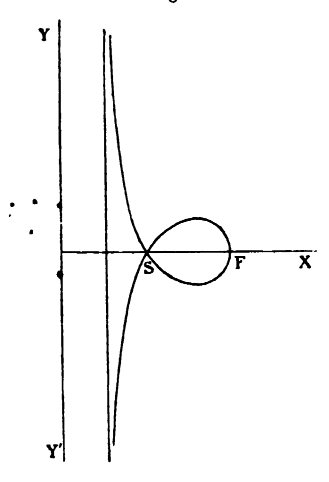
$$\rho = \frac{p}{4} \times \frac{2 - 3\sin^2\omega}{\cos\omega}.$$

Telle est l'équation du lieu de Σ_1, qui est en même temps le lieu de Σ_2. Ce lieu est une cubique unicursale ayant pour point double le point S; on la construit sans difficulté; elle a la forme d'une strophoïde, passe par F, et admet pour asymptote une parallèle à la directrice de P, équidistante de cette droite et de S (*fig.* 3).

Remarques diverses. — 1° Nous avons démontré que P_1 et P_2 sont tangentes en F; la tangente commune en ce point est la perpendiculaire à Δ; l'autre tangente commune réelle est parallèle à Δ.

2° Le point C (*fig.* 2), ayant même polaire par rapport aux paraboles P_1 et P_2, est le point de rencontre de deux sécantes communes à ces coniques; l'une de ces sécantes est CF; il est facile de trouver l'autre.

Fig. 3.



P_1 et P_2 peuvent, en effet, être considérées comme des coniques inscrites dans une troisième, formée de la tangente commune $L_1 L_2$ et de la droite de l'infini du plan.

D'après un théorème connu, les cordes de contact de P_1 et P_2 avec cette troisième conique et les sécantes communes à P_1 et P_2 forment un faisceau harmonique; or ces cordes de contact sont les diamètres CA et CB de P_1 et P_2, donc la sécante commune cherchée est la polaire de CF par rapport à l'angle $\widehat{ACB}$, c'est-à-dire la directrice de P; les points correspondants communs à P_1 et P_2 sont imaginaires. On verrait aussi facilement que P et P_1 se coupent en deux points réels, et que la droite qui les joint passe par C; de même pour P et P_2.

3° Nous avons trouvé, dans la troisième partie,

$$SF_1 = \frac{p}{2}\frac{\sin 3\omega}{\sin 2\omega}.$$

Le lieu des foyers des paraboles P_1 et P_2 a pour équation

$$\rho = \frac{p}{2}\frac{\sin 3\omega}{\sin 2\omega},$$

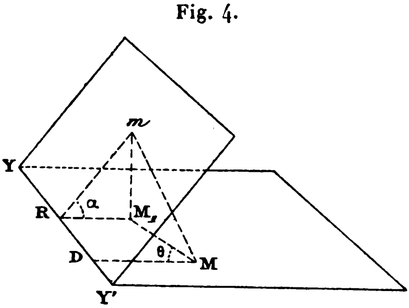
c'est une courbe de la même famille que celle que nous avons construite plus haut.

Il serait facile de démontrer quelques propriétés de ces courbes en remarquant qu'elles sont des transformées de coniques par rayons vecteurs réciproques.

Voici une autre solution plus concise et fort élégante :

I. Soient YY' (*fig.* 4) la directrice de P, M un point quelconque de la courbe, MM_1 la parallèle à Δ_1 mené par M, MD

Fig. 4.



la perpendiculaire menée de M à Y'Y, θ l'angle aigu de Δ avec l'axe de P; nous avons $MM_1 = MD$.

Par Y'Y, faisons passer un plan faisant avec le plan de P un angle aigu quelconque α; soit m le point commun à ce plan

et à la perpendiculaire en M_1 au plan de P, mR perpendiculaire à Y′Y; M_1R est aussi perpendiculaire à cette droite. Nous pouvons écrire

$$\operatorname{tang}\widehat{mMM_1} = \frac{mM_1}{M_1M} = \frac{M_1R\operatorname{tang}\alpha}{M_1M}$$
$$= \frac{M_1D\sin\frac{\theta}{2}\operatorname{tang}\alpha}{M_1M} = 2\sin^2\frac{\theta}{2}\operatorname{tang}\alpha = \text{const.}$$

Comme de plus le plan MmM_1 a une direction fixe, nous voyons que Mm est parallèle à une direction fixe.

Le lieu de m est une projection oblique de P, c'est-à-dire une parabole; le lieu de M_1 est la projection orthogonale du précédent, c'est donc une parabole : soit P_1.

Les tangentes à ces trois courbes aux points correspondants M, m, M_1 coupent Y′Y au même point; en ce point passe aussi la tangente en M_2 à la parabole P_2.

Ainsi *les tangentes aux paraboles* P, P_1, P_2 *aux trois points correspondants* M, M_1, M_2 *concourent sur la directrice de* P.

Cette remarque va nous permettre de terminer simplement la question.

II. Soient S_1 et S_2 (*fig.* 5) les points de P_1 et P_2 correspondant au sommet S de P : les tangentes en S, S_1, S_2 à P, P_1, P_2 devant se couper sur la directrice de P sont parallèles; les normales en S_1 à P_1, en S_2 à P_2 sont perpendiculaires à cette directrice.

On démontre facilement que les axes de P_1 et P_2 sont les bissectrices de $\widehat{S_1SF}$ et $\widehat{S_2SF}$. Soit S_1N_1 la normale en S_1 à P_1; I_1N_1 est la sous-normale; et comme I_1 est le milieu de SN_1, on a

$$p_1 = I_1S,$$

en désignant par p_1 le paramètre de P_1.

On a de même

$$p_2 = I_2S.$$

Par suite

$$p_1^2 + p_2^2 = \overline{SF}^2 = \text{const.}$$

La propriété énoncée plus haut permet de voir que les pa-

raboles P_1 et P_2 sont tangentes en F; reportons-nous à la *fig.* 5 de la première solution : la tangente en F à P_1 coupe sur la directrice la tangente en B à P; de même la tangente en F

Fig. 5.

à P_2 coupe sur la directrice la tangente en A à P. Comme les tangentes en A et B à P concourent sur la directrice de cette courbe, P_1 et P_2 admettent la même tangente en F.

De cette propriété, il résulte aussi immédiatement que la tangente à P parallèle à Δ est aussi tangente à P_1 et P_2.

III. *Lieu des sommets de* P_1 *et* P_2. — La tangente en S_1 à P_1 rencontre l'axe de cette courbe en T : le sommet de P_1 est le milieu s_1 de TI_1.

Menons FR parallèle à Y'Y; nous avons

$$I_1 R = I_1 T.$$

Par suite

$$I_1 s_1 = \frac{I_1 R}{2},$$

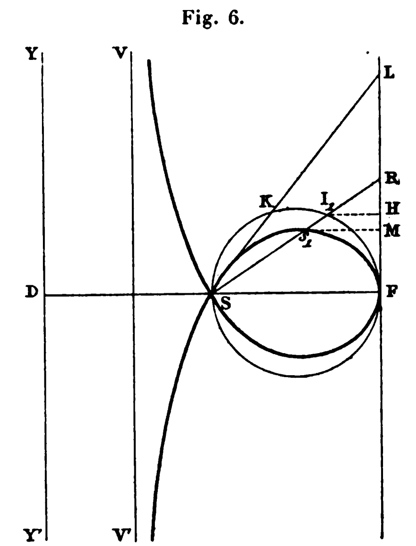
d'où la génération suivante pour le lieu des points s_1 :

Par S, *on mène une transversale quelconque qui coupe en* I_1 *la circonférence de diamètre* SF *et en* R *la perpen-*

diculaire en F *à* SF; *on prend* $I_1 s_1 = \frac{I_1 R}{2}$ *sur* I_1S : *la courbe lieu de* s_1 *est la courbe lieu des sommets de* P_1 *et* P_2.

La courbe se construit alors par points sans difficulté (*fig.* 6) : Elle passe en F où elle est tangente à FR, a en S un point

Fig. 6.



double dont les tangentes sont la droite SL, telle que $SK = \frac{SL}{3}$ et sa symétrique par rapport à SF.

Elle a une asymptote parallèle à Y'Y; soient I_1H et s_1M perpendiculaires à FR,

$$\frac{s_1 M}{I_1 H} = \frac{s_1 R}{I_1 R} = \frac{3}{2}.$$

La distance du point à l'infini de la courbe à FL est donc égale à $\frac{3}{2}$ SF; autrement dit, l'asymptote est la droite VV' parallèle à Y'Y et équidistante de cette droite et de S.

X.

AUTRE SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA MÊME QUESTION;

PAR M. LE CAPITAINE MALO.

Sur une parallèle quelconque à la droite donnée (Δ), il y a quatre points du lieu N, N', n, n' correspondant par couples aux deux points M et m où cette parallèle à (Δ) rencontre la parabole. S'il y avait sur Mm un autre point du lieu qui résulterait de la construction appliquée, non point à Mm, mais à une autre parallèle à (Δ), ce ne pourrait être que le point infiniment éloigné dans cette direction : ainsi, sauf le cas où le lieu admettrait une asymptote parallèle à (Δ), ce qu'on verra plus loin être impossible, il est acquis premièrement que l'ordre du lieu est 4.

Une première série de quatre points N, N', n, n' étant obtenue, toutes les séries analogues peuvent y être rattachées par une construction simple. En effet, si M_1 est un second point de la parabole, il suffira de prendre le point T où la droite MM_1 rencontre la directrice (D) et de tirer les droites TN, TN' qui couperont la parallèle à (Δ) menée par M_1 aux points cherchés N_1 et N'_1, correspondant à M_1, ... En effet, abaissant sur la directrice les perpendiculaires MP et M_1P_1, les segments MT, M_1T sont dans le même rapport que les droites MP, M_1P_1, et comme celles-ci sont dans le même rapport que MF, M_1F, partant que MN, M_1N_1, il est clair que les triangles MNT, M_1N_1T sont semblables et que N, N_1, T sont trois points en ligne droite. Cette construction montre comment l'on obtiendra la tangente en chaque point N du lieu, par la jonction de N avec le

point où la directrice est coupée par la tangente à la parabole au point correspondant M.

J'examine maintenant la position de quelques points intéressants du lieu.

Je suppose d'abord que les points M et m coïncident; il en est alors de même des deux couples NN' et nn', et ici N s'est réuni à n, N' à n'. Cette circonstance se présentera deux fois, l'une quand la droite Mm sera tangente à la parabole (en μ), l'autre quand Mm se sera éloignée indéfiniment. Dans le premier cas, les points N et n, N' et n' étant devenus coïncidents, en $\mathfrak{M}$ et ν, de réels et distincts qu'ils étaient immédiatement auparavant et allant devenir imaginaires pour un nouveau déplacement infiniment petit de Mm, il est clair que Mm est une tangente double à la courbe. Si l'on objectait que les points $\mathfrak{M}$ et ν pourraient être des points de rebroussement, il suffit de se reporter à la construction de la tangente donnée ci-dessus, pour voir que celles en $\mathfrak{M}$ et ν coïncident avec $\mathfrak{M}\nu$. Quant à prétendre qu'il peut s'agir de deux points de rebroussement de deuxième espèce avec la même droite $\mathfrak{M}\nu$ pour tangente de rebroussement en chacun d'eux, l'impossibilité d'une pareille assertion est telle qu'il est absolument inutile de s'y arrêter. Le deuxième cas est identique au premier et le lieu admet la droite à l'infini comme bitangente : il y a seulement matière à trouver les directions des points de contact. Pour cela, il suffit encore de se servir de la construction donnée d'autre part, en partant, par exemple, des points $\mathfrak{M}$ et ν, qu'il y a réel avantage à choisir comme points initiaux. Alors, M étant passé à l'infini, T vient en Θ, projection de μ sur la directrice et les directions cherchées sont $\Theta\mathfrak{M}$, $\Theta\nu$, rectangulaires entre elles, car $\Theta\mu = \mu\mathfrak{M} = \mu\nu = \mu F$; Θ et F sont, du reste, symétriques par rapport à $\overline{\mathfrak{M}\mu\nu}$.

Le point n peut coïncider non plus comme précédemment avec N (ce qui entraîne la coïncidence simultanée de n' avec N'), mais avec N', N et n' restant distincts. Cela arrive manifestement lorsque la corde parallèle à (Δ) passe par le foyer F. Soient alors désignées par $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{m}$ ces positions particulières des points M et m. Pour obtenir les tangentes en F, il faut, comme on a vu, prendre les points où celles en $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{m}$ coupent la directrice et les joindre à F; mais ici, en raison des propriétés connues des cordes focales, ces points coïncident en Θ : les deux tangentes en F sont donc coïncidentes avec la droite FΘ perpendiculaire à (Δ). Cette fois encore on n'a point cependant affaire à un rebroussement, car lorsque la corde de direction fixe traverse le foyer F, les points N' et n, réels avant ce passage en F, sont encore réels après. On est en présence de cette singularité particulière résultant du contact de deux branches de courbe, équivalente à deux points doubles (et à deux tangentes doubles), qu'on a nommée *point tacnodal*.

Je passe maintenant à un dernier genre de coïncidence entre deux des quatre points d'une même série N, N', n et n' : c'est celle qui a lieu entre deux points d'un même couple N et N'. Alors les distances MN et MN' sont de module nul, ce qui entraîne qu'il en soit de même des distances MF et MP, et ainsi l'on voit que le cas en question est celui où le point M est l'un ou l'autre des points communs à la parabole donnée et à sa directrice. Ici une certaine attention est nécessaire pour ne pas se méprendre sur la nature des points envisagés : on aura établi que ce sont des points doubles, si l'on montre qu'il existe plus d'une sécante passant par ces points et y ayant deux intersections avec le lieu confondues. Or une sécante remplissant cette condition est par définition la droite de direction (Δ); mais il en est de

même pour la droite isotrope qui passe par ce point et qui admet comme point réel le foyer F de la parabole, à cause de mod MN = mod MN' = mod MF = zéro.

Cette circonstance est importante, car ces deux points doubles, joints au point tacnodal précédemment reconnu et qui en vaut deux autres, donnent un total de quatre points doubles, limite qu'une quartique ne peut atteindre sans se décomposer en deux coniques, et comme on a vu que la droite de l'infini était une bitangente, il s'agit ici de deux paraboles à axes rectangulaires et se touchant en un point F.

Cela étant, les droites Θ𝔑 et Θν sont pour chacune de ces paraboles les diamètres conjugués à la direction (Δ) : elles passent donc par les points 𝔐 et 𝔪 de la parabole donnée, qui sont les extrémités de la corde focale de direction (Δ). Cette remarque est, du reste, de peu de conséquence, mais non pas la suivante. Les droites rectangulaires ΘF, 𝔑ν étant tangentes aux paraboles trouvées en F et 𝔑 d'une part, en F et ν de l'autre, leur point de rencontre I appartient aux directrices de ces paraboles, dont les foyers sont les projections Φ et φ de I sur les cordes de contact F, 𝔑, Fν. [On voit en passant que, lorsque (Δ) varie, l'enveloppe des directrices est une parabole homothétique à la proposée avec F comme centre et $\frac{1}{2}$ comme rapport d'homothétie]. Qu'on abaisse maintenant IS perpendiculaire sur FD, S est le sommet de la parabole donnée, et, par construction, les points S, Φ, φ appartiennent à un même cercle décrit sur le diamètre IF. Donc l'angle SΦF est égal à l'angle SIF, c'est-à-dire à l'angle DΘF. Mais, dans le cercle Θ𝔑Fν, de centre μ, cet angle formé par une sécante FΘ et par la tangente en Θ est égal à l'angle inscrit Θ𝔑F. Les droites Θ𝔑, SΦ sont donc parallèles, et, par suite, la deuxième, qui joint le foyer de la parabole

à son point à l'infini est l'axe : il passe, comme il avait été annoncé, par un point fixe, le sommet de la parabole donnée.

Le paramètre d'une parabole est égal à deux fois la distance du foyer à la directrice. Le paramètre d'une des paraboles trouvées est donc égal au double de la projection de $\overline{\text{I}\Phi}$ sur SΦ, c'est-à-dire à

$$2\overline{\text{I}\Phi}\sin(\text{I}\Phi, \Theta\nu).$$

Or l'angle en question est égal à

$$\widehat{\Theta\mathcal{N}\text{F}} = \widehat{\text{D}\Theta\text{F}} = \widehat{\text{I}\mathcal{N}, \text{DF}} = \theta.$$

De même le paramètre de l'autre parabole est égal à

$$2\overline{\text{I}\varphi}\sin\theta,$$

et, par suite, la somme des carrés est

$$4\left(\overline{\text{I}\Phi}^2 + \overline{\text{I}\varphi}^2\right)\sin^2\theta.$$

Mais

$$\overline{\text{I}\Phi}^2 + \overline{\text{I}\varphi}^2 = \overline{\text{IF}}^2$$

et, par suite, quatre fois cette somme vaut $\overline{\Theta\text{F}}^2$ qui, multipliée par $\sin^2\theta$, donne $\overline{\text{DF}}^2$, quantité constante.

Je passe maintenant au lieu des sommets des deux paraboles trouvées quand la direction (Δ) varie. Il s'agit d'abord de voir comment on peut le plus directement en construire un point. L'examen attentif de la figure montre que, par exemple, ayant construit sur la base SF un triangle SFΦ dont l'angle en Φ soit double de l'angle en S, on mènera la bissectrice ΦO et l'on projettera d'abord le point F sur cette bissectrice, ensuite le point ainsi obtenu sur SΦ en Σ. Ou bien, ce qui revient au même, considérant un cercle passant par les points S et F, et le point milieu O de l'arc SF, on portera, à partir de F, l'arc FΦ égal à l'arc OF : joignant alors SΦ et

y projetant O en Δ, le point cherché Σ est le milieu du segment $\Delta\Phi$. Il est bien clair, d'ailleurs, que l'on ne peut pas *substantiellement* distinguer l'une des deux paraboles trouvées de l'autre et que la même courbe géométrique (symétrique nécessairement par rapport à SF) sera le lieu de leurs sommets.

Par exemple, dans le dernier mode de construction indiqué, le point φ du cercle diamétralement opposé à Φ, étant joint à S, donne un point σ, milieu du segment $\varphi\delta$, δ étant la projection du point milieu du plus grand arc SF. Les points Φ et φ, Δ et δ, Σ et σ vont par couples naturels, suivant ce qui a été admis dans l'énoncé.

Cela étant, il faut reconnaître que l'équation polaire du lieu est la traduction immédiate de propriétés évidentes dans les figures, et que se refuser à écrire sous sa vraie forme et à interpréter cette équation, est surtout faire acte d'intransigeance géométrique.... En adoptant cependant exclusivement ce dernier point de vue, la courbe (Σ), lieu des sommets, se présente comme diamètre curviligne, par rapport au pôle S, des courbes (Φ), lieu des foyers, et (Δ), lieu des points centraux sur les directrices. Ces lieux n'étant point envisagés dans l'énoncé, leur introduction fait longueur, bien que leur étude soit en somme facile.

J'examine d'abord la courbe (Δ). Elle résulte (isolément) de la construction suivante. Étant donnée une droite SF et la perpendiculaire $\overline{OO'}$ au milieu ω de $\overline{SF}$, on considère un triangle isoscèle ayant pour sommet S et sa base sur $\overline{OO'}$: les pieds Δ et Δ' des hauteurs sont les points dont on cherche le lieu. Sur une droite issue de S, il y a donc *un seul* point variable du lieu, mais ce point vient deux fois en S suivant les droites à $45°$ sur SF, quand le triangle SOO' est rectangle : on a

donc affaire à une cubique. Les points $\Delta\Delta'$ se réunissant en ω quand l'angle en S est nul, cette cubique forme une boucle $S\omega S$. Pour aller plus loin, je remarque que les points S, Δ, Δ' et H (point de concours des hauteurs) sont sur un cercle, et que les points S, K (projections de Δ, Δ' sur SF), H et ω, forment une division harmonique. Donc, sur une droite $\Delta K \Delta'$, les points du lieu s'obtiennent en coupant par un cercle ayant son centre sur SF et passant par les points S et H (conjugué de S par rapport au segment $K\omega$). H venant en F quand $\Delta\Delta'$ passe à l'infini, deux des points à l'infini de la courbe sont, par définition, les points cycliques; d'autre part, H étant à l'infini lorsque K est symétrique de ω par rapport à S, on a l'asymptote réelle de la courbe, que toutes ces propriétés identifient à la strophoïde droite.

J'étudie maintenant la courbe (Φ). Sur chaque droite issue de F il y a trois points du lieu, car à cette droite, faisant l'angle ΦFX, correspondent trois droites passant par S et faisant avec SF les angles

$$\tfrac{1}{3}\widehat{\Phi FX},\quad \tfrac{1}{3}\widehat{\Phi FX}+120^\circ,\quad \tfrac{1}{3}\widehat{\Phi FX}+240^\circ.$$

La courbe est donc aussi du troisième ordre, à moins, cependant, que F ne soit un point du lieu, et cela ne peut avoir lieu que si $F\Phi$ coïncide avec FX; mais alors deux des droites $S\Phi$ font avec SF les angles de 60° et 120°, et ce sont les tangentes en S qui est un point double; quant au point commun à la limite aux droites coïncidentes SF, FX, et qui paraît, à première vue, indéterminé, la construction des points de (Φ) par le moyen du cercle $SF\Phi\varphi$ montre que l'arc SF s'étant appliqué sur sa corde, Φ est venu au point X tel que l'on ait

$$FX = \tfrac{1}{2}SF.$$

La position correspondante au point φ est à l'infini. Du

reste, d'une façon générale, le point φ étant projeté sur SF, la distance de cette projection au point S s'exprime par $\overline{S\varphi}.\sin\theta$, en désignant par θ l'angle $\widehat{FS\Phi}$; or, on a

$$\overline{S\varphi}^2 + \overline{S\Phi}^2 = \overline{\Phi\varphi}^2 = \frac{\overline{SF}^2}{\sin^2 2\theta}.$$

Donc

$$\lim(\overline{S\varphi}.\sin\theta) = \lim\sqrt{\frac{\overline{SF}^2.\sin^2\theta}{\sin^2 2\theta} - \overline{S\Phi}^2.\sin^2\theta},$$

et comme la limite de $\overline{S\Phi}.\sin\theta$ est évidemment nulle, la limite cherchée est la même que celle de

$$\overline{SF}\,\frac{\sin\theta}{\sin 2\theta} = \tfrac{1}{2}\overline{SF}.$$

La courbe (Φ) a donc même asymptote réelle que la courbe (Δ). D'autre part, sur tout cercle passant par les points S et F, il y a seulement deux points variables du lieu : il y en a donc quatre autres fixes, parmi lesquels deux ont été reconnus en S; les deux derniers, puisqu'ils ne peuvent être en F, sont nécessairement les points cycliques. La courbe (Φ), comme la courbe (Δ), est une cubique circulaire.

Cela étant, pour trouver l'ordre de la eourbe (Σ), il suffit de compter ses points à l'infini, lesquels répondent un par un à chacun des points à l'infini de (Φ) *ou* de (Δ); mais comme les points à l'infini de ces courbes coïncident, il y a seulement trois points Σ à l'infini. La courbe (Σ) étant ainsi une cubique et un seul point Σ existant sur chacune des droites telle que $S\varphi$, c'est que S est un point double : ces considérations exclusivement géométriques ne permettent pas de fixer commodément quelle est la direction des tangentes en S; on voit seulement qu'elle est intermédiaire entre 45° et 60°.

La véritable valeur est

$$\text{angle}(\text{tang} = \sqrt{2}).$$

Au lieu de supposer que le point Σ divise le segment $\overline{\Delta\Phi}$ en parties égales, on pourrait, sans avoir à modifier aucune conclusion essentielle, supposer qu'il partage le même segment dans un rapport donné. A la limite on trouverait une cubique composée de l'asymptote réelle commune et des droites isotropes issues de S. Par suite, en ayant égard à la position d'un seul couple particulier ΔΦ, on verrait que (Δ) est la courbe diamétrale de (Φ) et de son asymptote réelle par rapport au pôle.

Remarque. — Si, au lieu de s'en tenir *strictement* à l'énoncé tel qu'il a été proposé, on lui eût fait subir une très légère modification, la démonstration eût pu être assez notablement abrégée. Dans le premier cas, les couples de points N et N′, *n* et *n′* s'obtiennent en prenant d'abord les deux points M et *m* où une droite de direction donnée coupe une parabole, puis en cherchant les intersections de cette même droite avec les cercles ayant les points M et *m* pour centres et les distances de ces points au foyer de la parabole comme rayons : le problème est biquadratique, le lieu est *a priori* une quartique, et il est nécessaire de faire voir qu'il y a sur cette quartique un nombre surabondant de points doubles, pour établir du même coup qu'elle se décompose en deux coniques. Mais si, au lieu des distances des points M et *m* au foyer, on considère leurs distances à la directrice, le problème commence à changer de nature, car on n'est plus alors forcé de déterminer à la fois chaque couple NN′, mais on peut considérer séparément le point N, par exemple, comme l'un des sommets à la base d'un triangle isoscèle dont le sommet principal décrit une parabole et l'autre sommet

à la base la directrice de cette parabole, les côtés conservant des directions constantes. Il est évident cette fois que le problème est simplement quadratique, et le lieu de N est, *a priori*, une conique; quant à établir qu'il s'agit effectivement d'une parabole, c'est ce qu'il est facile de faire de la même manière que ci-dessus en examinant la nature des points à l'infini.

SUR LA CORRÉLATION ENTRE LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES PONCTUELLES ET LES SYSTÈMES DE COORDONNÉES TANGENTIELLES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Un intéressant article [1] de M. Casorati, dont la traduction a paru dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. XVII, p. 5), contient les lignes suivantes :

« Ces deux systèmes de coordonnées (le système cartésien et le système plückérien) ne donnent pas toujours des formules correspondantes de même nature analytique, et l'on en conclut que les coordonnées cartésiennes ne peuvent se concilier entièrement avec le principe de la dualité. Il me semble que cette conclusion n'est pas licite et que le fait qui y donne lieu ne prouve qu'une chose, c'est que les coordonnées plückériennes ne sont pas en corrélation parfaite avec les coordonnées cartésiennes. »

Transformant, dès lors, suivant la loi de la dualité judicieusement interprétée, la conception ordinaire des

---

[1] Cet article a paru en 1877 dans les *Comptes rendus de l'Institut lombard*.

coordonnées cartésiennes, l'auteur obtient un système de coordonnées tangentielles qui ne sont autres que celles dont, sous le nom de *coordonnées parallèles*, nous avons ici même développé la théorie (3e série, t. III et IV).

On sait qu'indépendamment de la nôtre, et simultanément avec elle, une autre théorie des coordonnées parallèles a été publiée en Allemagne par M. K. Schwering [1] qui, dans des écrits partiels, s'était déjà occupé du sujet à plusieurs reprises [2].

M. Schlegel, dont l'attention avait été attirée sur ce sujet par les recherches de M. Schwering avait, de son côté, remarqué la parfaite corrélation des coordonnées parallèles avec les coordonnées cartésiennes (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XXIII).

Celle-ci a encore été mise en lumière, dans un ordre d'idées plus pratique, par le lien que, dans le Chapitre IV de notre *Nomographie* [3], nous avons établi entre nos *abaques à points isoplèthes* et les *abaques à droites isoplèthes* de M. Lalanne.

Nous nous proposons de revenir encore ici sur ce fait pour en fournir une nouvelle justification théorique propre à mettre en évidence les rapports mutuels des divers systèmes fondamentaux de coordonnées ponctuelles et tangentielles.

Envisageant d'ailleurs, pour plus de généralité, le cas

---

[1] Voir l'intéressante comparaison de ces deux théories, faite par M. Schwering lui-même dans la *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XXXI, [2], p. 71.

[2] J'ai fait voir dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XVIII, p. 109) que l'idée première des coordonnées parallèles devait être attribuée à Chasles.

[3] Ouvrage paru en 1891 chez Gauthier-Villars et fils, et dont il a été rendu compte dans le numéro de décembre 1891 des *Nouvelles Annales*.

de l'espace, nous partirons du système très général ainsi défini :

Soit OABC un tétraèdre de référence.

Étant donné un point P, supposons que :

Le plan	PBC	coupe	OA	en a,
»	PCA	»	OB	» b,
»	PAB	»	OC	» c.

Nous poserons, en faisant l'hypothèse que les paramètres λ, μ, ν aient des valeurs fixes pour tous les points de l'espace, mais d'ailleurs quelconques, et que les segments soient pris avec leur signe,

$$(1) \qquad x = \lambda \frac{Oa}{Aa}, \qquad y = \mu \frac{Ob}{Bb}, \qquad z = \nu \frac{Oc}{Cc},$$

et nous dirons que x, y, z sont les coordonnées du point P.

De même, si un plan π coupe OA en α, OB en β, OC en γ, nous poserons

$$(2) \qquad u \leqq -\frac{1}{\lambda} \frac{A\alpha}{O\alpha}, \qquad v = -\frac{1}{\mu} \frac{B\beta}{O\beta}, \qquad w = -\frac{1}{\nu} \frac{C\gamma}{O\gamma},$$

et nous dirons que u, v, w sont les coordonnées du plan π.

On voit que le point O et le plan ABC jouent ici des rôles symétriques ; les coordonnées de l'un et de l'autre sont nulles. Nous pourrons appeler l'un le *point fondamental*, l'autre le *plan fondamental* du système considéré.

Cherchons, dans ce système, l'équation du point et du plan unis, c'est-à-dire la condition analytique qui doit lier les coordonnées x, y, z aux coordonnées u, v, w, pour que le point P soit dans le plan π.

A cet effet, prenons momentanément les droites OA, OB, OC comme axes cartésiens OX, OY, OZ, et dési-

gnons par X, Y, Z les coordonnées du point P dans ce système.

Puisque, par définition, le point P est à la fois dans chacun des plans aBC, AbC, ABc, on a

$$(3)\qquad \frac{X}{Oa}+\frac{Y}{OB}+\frac{Z}{OC}=1,\quad \frac{X}{OA}+\frac{Y}{Ob}+\frac{Z}{OC}=1,\quad \frac{X}{OA}+\frac{Y}{OB}+\frac{Z}{Oc}=1.$$

Mais, des égalités (1), on tire

$$\frac{Oa}{OA}=\frac{x}{x-\lambda},\qquad \frac{Ob}{OB}=\frac{y}{y-\mu},\qquad \frac{Oc}{OC}=\frac{z}{z-\nu}.$$

Les équations (3) deviennent dès lors

$$(4)\qquad \frac{\lambda X}{x\,OA}=\frac{\mu Y}{y\,OB}=\frac{\nu Z}{z\,OC}=\frac{X}{OA}+\frac{Y}{OB}+\frac{Z}{OC}-1.$$

La condition pour que le point P se trouve dans le plan π ou $\alpha\beta\gamma$ s'exprime par

$$(5)\qquad \frac{X}{O\alpha}+\frac{Y}{O\beta}+\frac{Z}{O\gamma}=1.$$

Mais les égalités (2) donnent

$$\frac{OA}{O\alpha}=\lambda u+1,\qquad \frac{OB}{O\beta}=\mu v+1,\qquad \frac{OC}{O\gamma}=\nu w+1,$$

et l'équation (5) devient

$$\lambda u\,\frac{X}{OA}+\mu v\,\frac{Y}{OB}+\nu w\,\frac{Z}{OC}+\frac{X}{OA}+\frac{Y}{OB}+\frac{Z}{OC}-1=0,$$

ou, en vertu des équations (4),

$$(ux+vy+wz+1)\left(\frac{X}{OA}+\frac{Y}{OB}+\frac{Z}{OC}-1\right)=0.$$

Si nous écartons le cas limite où le second facteur serait nul, c'est-à-dire où le point P serait dans le plan fondamental ABC, auquel cas les coordonnées x, y, z de P seraient infinies, nous voyons que la condition se

réduit à

(6) $$ux + vy + wz + 1 = 0.$$

Telle est, dans le système général de coordonnées que nous considérons, l'équation du point et du plan unis. Ce système établit donc entre les éléments point et plan le même mode de correspondance que celui qui résulte du rapprochement des systèmes cartésien et plückérien d'une part, des systèmes parallèle ponctuel [1] et parallèle tangentiel de l'autre. Nous allons voir maintenant comment ces divers systèmes peuvent en dériver.

Imaginons d'abord que le plan fondamental ABC soit rejeté à l'infini. Pour que, dans cette hypothèse, les coordonnées d'un point quelconque ne soient pas nulles, donnons-nous d'abord pour les paramètres λ, μ, ν les valeurs

$$\lambda = -\mathrm{OA}, \qquad \mu = -\mathrm{OB}, \qquad \nu = -\mathrm{OC}.$$

Nous avons alors à la limite

$$x = \mathrm{O}a, \qquad y = \mathrm{O}b, \qquad z = \mathrm{O}c \quad \text{(coordonnées cartésiennes)},$$
$$u = -\frac{1}{\mathrm{O}\alpha}, \qquad v = -\frac{1}{\mathrm{O}\beta}, \qquad w = -\frac{1}{\mathrm{O}\gamma} \quad \text{(coordonnées plückériennes)}.$$

Corrélativement, rejetons le point fondamental O à l'infini. Ici, nous prendrons

$$\lambda = -\frac{1}{\mathrm{OA}}, \qquad \mu = -\frac{1}{\mathrm{OB}}, \qquad \nu = -\frac{1}{\mathrm{OC}},$$

et nous aurons à la limite

$$x = -\frac{1}{\mathrm{A}a}, \quad y = -\frac{1}{\mathrm{B}b}, \quad z = \frac{1}{\mathrm{C}c} \quad \text{(coordonnées parallèles ponctuelles)},$$
$$u = \mathrm{A}\alpha, \qquad v = \mathrm{B}\beta, \qquad z = \mathrm{C}\gamma \quad \text{(coordonnées parallèles tangentielles)}.$$

---

[1] Nous avons défini celui-ci, au signe près des coordonnées, dans un article des *Nouvelles Annales* (3ᵉ série, t. VI, p. 493).

On voit que de l'une à l'autre de ces deux hypothèses corrélatives, il y a correspondance parfaite d'une part entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées parallèles tangentielles, de l'autre entre les coordonnées plückériennes et les coordonnées parallèles ponctuelles. Ainsi se trouve confirmé, pour la première partie, et complété, pour la seconde, par voie analytique le fait que le professeur Casorati avait déjà mis en évidence par voie synthétique dans ce Journal.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1891 (1);

PAR M. LE CAPITAINE MALO.

La première partie de l'énoncé est un corollaire immédiat de la proposition plus générale : *Deux points* P, Q *d'une conique, et le pôle* M *de la droite* PQ *par rapport à cette conique, sont sur une même conique avec tout système analogue* P′Q′M′ (2), et il suffit de faire l'hypothèse particulière que les points P′Q′ ont été pris sur le cercle déterminé par le triangle MPQ. Quant à la proposition générale, elle est fondée sur ce fait que la droite de Pascal, relative à l'hexagone MPP′M′Q′Q, est obtenue par les constructions même qui donnent la polaire par rapport à la conique du point d'intersection I′ des

(1) Voir l'énoncé, t. X, p. 311; 1891.

(2) Plus généralement encore : *Les sommets de deux triangles autopolaires par rapport à une conique sont sur une même conique; les côtés sont tangents à une même conique.*

droites PQ', $P'Q$. La dernière partie de l'énoncé aussi est immédiatement vérifiée en raison de ce qui précède, car elle revient à dire que les points I' et I'' sont conjugués par rapport aux points M et M', proposition qui vient d'être acquise, quelle que soit la nature de la conique $MPP'M'Q'Q$.

Pour établir que les points $FF'MM'$ sont sur un même cercle, le plus court est peut-être de ne pas chercher à tirer directement cette conséquence des constructions de l'énoncé, et d'autres qui peuvent s'en conclure, mais d'examiner d'une façon générale la nature de la correspondance entre les points M et M', laquelle est évidemment unique et réciproque (c'est-à-dire rationnelle), et d'achever de caractériser cette correspondance par l'étude de ses points exceptionnels, c'est-à-dire d'une part ceux pour lesquels le point M' coïncide avec M, et de l'autre, ceux pour lesquels ce point est indéterminé sur une certaine courbe algébrique dont l'ordre est principalement à reconnaître. Or, en premier lieu, si M et M' coïncident, $\overline{PQ}$ et $\overline{P'Q'}$ coïncident aussi : donc P, Q sont les points de contact avec la conique d'un cercle bitangent et contenant le point M, c'est-à-dire d'un cercle évanouissant; les points M en question sont donc les quatre foyers, réels et imaginaires, de la conique considérée. En second lieu, il est clair que, si M vient en O, centre de la conique, PQ passe à l'infini, et, par suite, le cercle OPQ se décompose en deux droites, PQ, qui contient quatre points du lieu (P, Q et les points cycliques ω, ω'), et une droite indéterminée passant par O : le pôle M' de cette droite est donc lui-même indéterminé à l'infini.

Un raisonnement analogue, quoique un peu plus abstrait, en raison de l'imaginarité de presque tous les éléments, montre que les points cycliques ω et ω' sont

deux autres positions de M pour lesquelles M' est indéterminé sur les droites $O\omega$ et $O\omega'$, respectivement.

Tout cela caractérise la transformation particulière du second degré dans laquelle un couple de points MM' se présentent comme conjugués par rapport à toutes les hyperboles équilatères construites sur un diamètre fixe (ici la droite F'F joignant les foyers de la conique donnée), et qui est caractérisée par la relation métrique $\overline{OM}.\overline{OM'} = \overline{OF}^2$, les droites OM, OM' étant symétriques par rapport à OF. Dès lors, si l'on mène par M' deux droites, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à OF, jusqu'à leurs rencontres avec OM, en m et μ, on voit que les points M, m et les foyers réels de la conique d'une part, M, μ et les foyers imaginaires d'autre part, sont situés sur deux cercles, qui, en raison de la symétrie par rapport à l'axe OF, pour le premier, et à l'axe perpendiculaire, pour le second, passent nécessairement par M'.

Cela établi, tout le reste est facile, car, les droites OM, OM' étant toujours également inclinées sur OF, M' est invariable du moment que FF' et M le sont, ce qui est l'hypothèse. Alors les points I', I'' sont sur la droite fixe $\overline{MM'}$, qu'ils divisent harmoniquement, et, quant au point I, étant le pôle d'une droite fixe par rapport à une série de coniques confocales (cas particulier du faisceau tangentiel de coniques), il décrit, comme on sait, une autre droite.

BIBLIOGRAPHIE.

Principes de la nouvelle Géométrie du triangle, par M. *Aug. Poulain*. In-8 de 48 pages. Librairie Croville-Morant; 1892. Prix : 2fr,50.

Il y a toujours eu des géomètres qui ont signalé des propriétés du triangle; mais, depuis peu d'années seulement, une étude *systématique* en a été faite, et les résultats ont été si rapidement multipliés, qu'ils ont, parmi les diverses branches de la Géométrie pure, formé un rameau spécial qu'on appelle maintenant la *Géométrie du triangle*.

Au fur et à mesure du développement de ces nouvelles études, de nombreux géomètres en Allemagne, en Angleterre, en Belgique, en France, en Hollande, etc., ont essayé de fixer, chacun à un certain point de vue, dans des notices bibliographiques, dans des résumés, l'état des connaissances au moment où ils écrivaient; pour ne citer que les travaux de langue française, parce que je connais très incomplètement les autres, j'indiquerai ceux de MM. *Neuberg, de Longchamps, E. Vigarié, Morel, Em. Lemoine*. A leur suite, le travail de M. *Poulain* vient à son heure, il les englobe pour ainsi dire tous, en exposant, dans un tableau habilement présenté et rigoureusement coordonné, le matériel des principes fondamentaux, des définitions et le vocabulaire des mots de récente création avec lesquels la Géométrie du triangle s'est construite, s'exprime et se développe.

La nature même du travail dont nous parlons le rend impossible à résumer, puisqu'il est lui-même un résumé où rien n'est inutile, aussi je n'écris point cette Notice dans le but que l'on puisse se faire une idée de ce qu'il contient, mais pour engager les géomètres qui s'intéressaient déjà au triangle à lire le Mémoire de M. *Poulain* et pour affirmer, à tous ceux qui veulent se mettre au courant de ces nouvelles études, qu'ils y trouveront un moyen facile d'initiation, et je dois ajouter : j'en connais peu où la question soit aussi simplement et aussi complètement traitée.

Je vais donc me borner à quelques remarques générales. L'auteur, dans ses démonstrations, se sert de la Géométrie analytique, de façon que tout élève des classes scientifiques puisse les suivre facilement ; page 32, l'auteur donne une démonstration géométrique rigoureuse de l'existence des points de *Brocard :* il trouve rapidement les coordonnées barycentriques de ces points ; la valeur des fonctions trigonométriques de l'angle ω de *Brocard* est également déduite des formules de l'auteur relatives aux coordonnées qu'il a appelées *angulaires* et introduites dans la Géométrie du triangle. Remarquons encore le théorème fondamental de la page 31 sur la puissance d'un point par rapport au cercle circonscrit, théorème dont l'importance se révèle bientôt ; le Chapitre sur les coordonnées tripolaires et sur les coordonnées angulaires ; la collection de formules pages 36 et suivantes ; les formules générales de la transformation des coordonnées lorsque l'on change le triangle de référence ; la systématisation de la recherche de points remarquables en ligne droite (en alignement) ; l'exposé en une seule page de presque tous les théorèmes sur le cercle de *Brocard* avec leur démonstration.

J'ai du plaisir à écrire ces lignes, élogieuses sans restriction, en constatant, à l'aide du Mémoire de M. *Poulain*, le chemin parcouru par la Géométrie du triangle et surtout à les écrire dans ce Journal, qui, en 1873, p. 364, a accueilli la petite Note sur le point que j'appelais alors : *le centre des médianes antiparallèles*, Note qu'on a bien voulu considérer comme une des origines de l'évolution actuelle de la Géométrie du triangle.

Em. Lemoine.

SUR LE THÉORÈME GÉNÉRAL RELATIF A L'EXISTENCE DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES;

Par M. G. PEANO,
Professeur à l'Université de Turin.

M. E. Picard, sous ce même titre (*Nouvelles Annales*, t. X, p. 197), prouve que, si l'on envisage le

système des n équations du premier ordre,

$$\frac{du}{dx} = f_1(x, u, v, \ldots, w), \qquad \ldots, \qquad \frac{dw}{dx} = f_n(x, u, v, \ldots, w),$$

où les f sont des fonctions continues réelles de x, u, ..., w, dans le voisinage de x_0, u_0, ..., w, et si de plus on suppose que l'on puisse déterminer n quantités positives A, B, ..., L, telles que

$$(\alpha) \left\{ \begin{aligned} &|f(x, u', v', \ldots, w') - f(x, u, v, \ldots, w)| < A|u' - u| \\ &\qquad\qquad + B|v' - v| + \ldots + L|w - w'|, \end{aligned} \right.$$

alors il existe des fonctions u, v, ..., w de x, continues dans le voisinage de x_0, satisfaisant aux équations différentielles, et se réduisant respectivement, pour $x = x_0$, à u_0, v_0, ..., w_0.

Or, pour démontrer l'existence des intégrales, l'hypothèse (α) n'est pas nécessaire. En la faisant, on peut déduire non seulement l'existence des intégrales dont il s'agit, mais aussi qu'elles sont uniques. J'ai prouvé cela dans ma Note *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires* (*Mathematische Annalen*, t. XXXVII, p. 182). La démonstration de la première partie de ce que j'affirme est un peu longue; la deuxième partie (la plus intéressante dans l'enseignement élémentaire) se prouve aisément.

En effet, soient u, v, ... et u', v', ... deux systèmes de fonctions de x, définies aux environs de $x = x_0$, satisfaisant aux équations différentielles, et se réduisant tous les deux à u_0, v_0, ... pour $x = x_0$. On aura

$$\frac{du}{dx} = f_1(x, u, v, \ldots, w), \qquad \ldots,$$

$$\frac{du'}{dx} = f_1(x, u', v', \ldots, w'), \qquad \ldots,$$

d'où l'on déduit

$$(\beta)\quad \frac{d(u'-u)}{dx} = f_1(x, u', v', \ldots) - f_1(x, u, v, \ldots), \qquad \ldots\ldots$$

Or, quelle que soit la fonction u de x, on a

$$\frac{d|u|}{dx} \leqq \left|\frac{du}{dx}\right|.$$

En posant $u'-u$, $v'-v$, ... au lieu de u dans cette inégalité, en vertu de (α) et de (β) on a

$$(\gamma)\quad \begin{cases} \dfrac{d|u'-u|}{dx} \leqq \mathrm{A}\,|u'-u| + \mathrm{B}\,|v'-v| + \ldots + \mathrm{L}\,|w'-w|, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Soit $\frac{\mathrm{M}}{n}$ la plus grande des quantités A, B, ..., L; posons $\mathrm{X} = |u'-u| + |v'-v| + \ldots + |w'-w|$. Sommons les inégalités (γ); on a

$$(\delta)\qquad \frac{d\mathrm{X}}{dx} \leqq \mathrm{MX}.$$

Pour tirer X de cette inégalité, multiplions par $e^{-\mathrm{M}(x-x_0)}$ (le facteur intégrant)

$$e^{-\mathrm{M}(x-x_0)}\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx} - \mathrm{MX}\right) \leqq 0,$$

d'où

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\mathrm{M}(x-x_0)}\mathrm{X}\right) \leqq 0.$$

Donc $e^{-\mathrm{M}(x-x_0)}\mathrm{X}$, qui s'annule pour $x \equiv 0$, et dont la dérivée est $\leqq 0$, sera, pour toute valeur de $x > x_0$, négative ou nulle

$$e^{-\mathrm{M}(x-x_0)}\mathrm{X} \leqq 0.$$

Mais $e^{-\mathrm{M}(x-x_0)}$ est positif, X est positif ou nul; donc $\mathrm{X} = 0$, et chacune de ses parties $|u'-u|$, $|v'-v|$, ... est aussi nulle, d'où

$$u' = u, \qquad v' = v, \qquad \ldots\ldots$$

Cela prouve qu'il y a un seul système de fonctions qui satisfait aux équations données, et qui prend des valeurs données pour la valeur fixée de la variable.

SUR LE THÉORÈME DE BUDAN ET FOURIER;

PAR M. G. FOURET,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

1. Le cours d'Algèbre supérieure de Serret contient une démonstration, déjà très simplifiée, du célèbre théorème découvert à la fois par Budan et par Fourier ([1]). On peut cependant, comme nous allons le faire voir, donner à cette démonstration une forme encore plus simple, qui nous semble offrir quelque intérêt, tant en raison du théorème lui-même que des conséquences auxquelles il conduit. On sait, en effet, que le théorème de Descartes s'en conclut immédiatement. On verra également plus loin comment on en fait découler très naturellement la règle de Newton, pour trouver une limite supérieure des racines d'une équation et une règle toute semblable, qui ne nous paraît pas connue, pour déterminer une limite inférieure de ces racines.

La valeur pédagogique, qu'acquiert ainsi le théorème de Budan et Fourier, nous engage à traiter ce sujet avec quelque développement.

2. THÉORÈME DE BUDAN ET FOURIER. — *Étant donnée une équation algébrique entière* $X = 0$, *à une seule inconnue* x, *le nombre des racines réelles de cette équation, comptées avec leur ordre de multiplicité,*

([1]) M. Ossian Bonnet en a donné, il y a plusieurs années, une démonstration toute différente, basée sur le théorème de Rolle (*Nouvelles Annales*, 1re série, t. III, p. 119).

qui sont comprises entre α et $\beta > \alpha$, est égal, ou inférieur d'un nombre pair, au nombre des variations que perd la suite formée par X *et ses dérivées successives, lorsqu'on y fait consécutivement $x = \alpha$ et $x = \beta$.*

Les fonctions algébriques entières, qui composent la suite

(1) $$X, \quad X', \quad X'', \quad \ldots, \quad X^{(m)},$$

m désignant le degré de X, ne peuvent changer de signe qu'en s'annulant. Cette suite ne peut donc perdre, ou gagner de variations, que lorsque x passe par une valeur annulant une ou plusieurs des fonctions (1).

Soit a une racine, d'ordre de multiplicité p, de $X = 0$. On peut toujours trouver un nombre positif h, tel que les fonctions X, X', ..., $X^{(m-1)}$ ne s'annulent pas, lorsque x varie de $a - h$ à a et de a à $a + h$. Alors, en vertu d'un théorème bien connu sur la dérivée logarithmique, la suite

(2) $$X, \quad X', \quad \ldots, \quad X^{(p)}$$

présente p variations, pour les valeurs de x comprises entre $a - h$ et a et p permanences, pour les valeurs de x comprises entre a et $a + h$ Donc, *la suite* (2) *perd p variations, quand x passe, en croissant, par une racine, multiple d'ordre p, de $X = 0$.*

Soit maintenant b une racine, d'ordre de multiplicité q, de $X^{(n)} = 0$ [1]. D'après la remarque précédente, la suite

$$X^{(n)}, \quad X^{(n+1)}, \quad \ldots, \quad X^{(n+q)}$$

perd q variations, lorsque x passe, en croissant, par la valeur b. Par conséquent, lors même que l'intervalle

---

[1] Serret distingue deux cas, suivant que q est pair ou impair. Notre raisonnement rend cette distinction inutile.

de $X^{(n-1)}$ à $X^{(n)}$ acquerrait une variation, *la suite*

$$X^{(n-1)},\quad X^{(n)},\quad X^{(n+1)},\quad \ldots,\quad X^{(n+q)}$$

ne peut gagner aucune variation, quand x passe, en croissant, par une racine, multiple d'ordre q, de $X^{(n)} = 0$.

Cela posé, substituons α et $\beta > \alpha$ à x dans la suite (1), et désignons par v_α et v_β les nombres de variations résultant de ces substitutions. Il est clair que v_α surpasse v_β d'autant d'unités au moins, qu'il y a, entre α et β, de racines de $X = 0$, comptées avec leur ordre de multiplicité, puisque la suite (1) ne perd de variations que lorsque x passe en croissant par une racine de $X = 0$, et qu'elle en perd, dans ce cas, autant qu'il y a d'unités dans l'ordre de multiplicité de la racine.

Pour compléter la démonstration du théorème, supposons, par exemple, que l'intervalle (α, β) comprenne un nombre impair de racines de $X = 0$, chacune d'elles étant comptée avec son ordre de multiplicité. En substituant successivement α et β à x dans X, on obtient des résultats de signes différents, et, comme $X^{(m)}$ est une constante, les nombres de variations v_α et v_β sont de parités différentes. Leur différence est donc impaire, de même que le nombre des racines comprises entre α et β.

Le raisonnement et la conclusion sont les mêmes, lorsqu'on suppose que l'intervalle (α, β) renferme un nombre pair de racines de $X = 0$.

3. *Remarques.* — 1° La démonstration précédente, en ce qui concerne $X^{(m)}$, s'appuie uniquement sur la constance du signe de cette dérivée. On en conclut que dans l'application du théorème de Budan et Fourier, on peut limiter la suite des dérivées à une dérivée qui, même en s'annulant, ne change pas de signe, pour les valeurs de x comprises entre les nombres α et β.

Cette remarque permet d'étendre le théorème aux équations transcendantes, sous certaines conditions de continuité qu'il est superflu d'énoncer ici.

2° Il peut arriver que les nombres substitués, α et β, annulent une ou plusieurs fonctions intermédiaires de la suite (1). On doit, en pareil cas, dans l'application du théorème, compter le nombre des variations de cette suite, en faisant abstraction des zéros.

En effet, supposons d'abord que ce soit $\alpha < \beta$ qui annule les fonctions consécutives $X^{(n)}, X^{(n+1)}, \ldots, X^{(n+q-1)}$. Prenons ε positif et assez petit pour qu'aucun nombre compris entre α et $\alpha + \varepsilon$ n'annule quelqu'une des fonctions (1). La substitution de $\alpha + \varepsilon$ à x dans $X^{(n)}$, $X^{(n+1)}, \ldots, X^{(n+q-1)}$ ne donnant lieu qu'à des permanences, les variations de la suite (1), pour $x = \alpha + \varepsilon$, sont en même nombre que pour $x = \alpha$, abstraction faite des fonctions qui s'annulent. D'ailleurs, l'équation $X = 0$ n'a aucune racine entre α et $\alpha + \varepsilon$. On doit donc, pour appliquer le théorème de Budan et Fourier, compter les variations de la suite (1) pour $x = \alpha$, sans avoir égard aux fonctions qui deviennent nulles.

Supposons maintenant que ce soit β qui annule $X^{(n)}$, $X^{(n+1)}, \ldots, X^{(n+q-1)}$. Prenons η positif et assez petit pour qu'aucun nombre compris entre $\beta - \eta$ et β n'annule quelqu'une des fonctions (1). La substitution de $x = \beta - \eta$ dans la suite $X^{(n)}, X^{(n+1)}, \ldots, X^{(n+q-1)}$ n'y produit que des variations. Il est bien clair alors que le nombre des variations de la suite (1), pour $x = \beta$, ne peut être qu'au plus égal au nombre des variations résultant de la substitution de $x = \beta - \eta$. On est donc en droit, dans l'application du théorème de Budan et Fourier, de compter les variations qui correspondent à $x = \beta$, abstraction faite des fonctions qui s'annulent.

4. *Application du théorème de Budan et Fourier aux équations ayant toutes leurs racines réelles.* — Remarquons d'abord que la suite (1) présente toujours m variations, pour $x = -\infty$, et m permanences, pour $x = +\infty$. Donc, dans le cas où l'équation $X = 0$ a toutes ses racines réelles, le nombre de ces racines est justement égal à $v_{-\infty} - v_{+\infty}$. Il résulte de là que, dans cette hypothèse, le nombre des racines réelles comprises entre α et $\beta > \alpha$ ne peut être inférieur et, par conséquent, est égal au nombre $v_\alpha - v_\beta$; car, pour que le premier de ces nombres fût inférieur au second, il faudrait, par compensation, que $v_{-\infty} - v_\alpha$ fût inférieur au nombre des racines réelles comprises entre $-\infty$ et α, ou $v_\beta - v_{+\infty}$ inférieur au nombre des racines réelles comprises entre β et $+\infty$, ce qui serait contraire au théorème de Budan et Fourier. Donc, *quand une équation algébrique entière* $X = 0$ *a toutes ses racines réelles, le nombre de ces racines, comprises entre deux limites* α *et* β, *est égal à la différence des nombres de variations que présente la suite formée par* X *et ses dérivées successives, quand on y substitue consécutivement* α *et* β.

5. *Théorème de Descartes.* — Le nombre des variations de la suite (1), pour $x = 0$, est égal au nombre des variations du polynôme

$$X = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-2} x^2 + a_{m-1} x + a_m,$$

supposé ordonné; car les fonctions, qui composent la suite, prennent alors respectivement les valeurs a_m, a_{m-1}, $1.2.a_{m-2}, \ldots 1.2\ldots m.a_0$. D'ailleurs, la suite (1) ne présente aucune variation pour $x = +\infty$. Donc, d'après le théorème de Budan et Fourier :

1° *Le nombre des racines positives d'une équation algébrique entière* $X = 0$ *est au plus égal au nombre*

des variations du polynôme X *ordonné, et la différence, s'il y en a une, est un nombre pair.*

2° *Le nombre des racines positives d'une équation algébrique entière* $X = 0$, *qui a toutes ses racines réelles, est égal au nombre des variations du polynôme* X *ordonné.*

6. *Limite supérieure des racines d'une équation. — Règle de Newton.* — Soit l un nombre qui, substitué à x dans la suite (1), n'y produit que des permanences. Comme il en est de même pour la substitution de $x = +\infty$, on peut affirmer, d'après le théorème de Budan et Fourier, que l'équation $X = 0$ n'a pas de racine réelle comprise entre l et $+\infty$. Donc, *tout nombre qui, substitué à x dans le polynôme entier* X *et dans ses dérivées successives, donne des résultats de même signe, est une limite supérieure des racines de l'équation* $X = 0$.

7. *Limite inférieure des racines d'une équation.* — Soit k un nombre positif ou négatif, qui, substitué à x dans la suite (1), y donne des résultats alternativement positifs et négatifs. Comme il en est de même pour la substitution de $x = -\infty$, on est en droit d'en conclure, d'après le théorème de Budan et Fourier, que l'équation $X = 0$ n'a pas de racine réelle comprise entre $-\infty$ et k. Donc, *tout nombre qui, substitué à x dans le polynôme entier* X *et dans ses dérivées successives, donne des résultats alternativement positifs et négatifs, est une limite inférieure des racines de l'équation* $X = 0$.

8. Il serait sans doute téméraire d'affirmer que cette règle si simple, pour trouver une limite inférieure des racines d'une équation, est nouvelle; et cependant, si

elle est déjà connue, comment se fait-il qu'on ne la trouve dans aucun des ouvrages classiques qui traitent de la résolution des équations? Elle présente en effet, comme il est facile de le voir, les mêmes facilités d'application et les mêmes avantages que la règle de Newton donnant une limite supérieure des racines. Elle jouit notamment de ces deux propriétés : 1° de fournir une limite inférieure, plus approchée de la plus petite racine que toutes celles données par les autres méthodes connues; 2° de permettre, dans le cas d'une équation ayant toutes ses racines réelles, de déterminer un nombre aussi peu inférieur que l'on veut à la plus petite racine.

Rien n'est plus aisé d'ailleurs que d'établir directement la règle en question de la manière suivante.

9. Soit k un nombre qui, substitué dans le polynôme entier $F(x)$ et dans ses dérivées successives, donne des résultats alternativement positifs et négatifs. Nous allons montrer que $F(x)$ ne peut s'annuler pour aucun nombre plus petit $k-h$ $(h>0)$. On a, en effet,

$$F(k-h) = F(k) - hF'(k) + \frac{h^2}{1.2}F''(k) + \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{h^p}{1.2\ldots p} F^p(k) + \ldots + (-1)^m \frac{h^m}{1.2\ldots m} F^m(k).$$

D'une manière générale, $F^p(k)$ est du signe de $F(k)$ ou d'un signe contraire, suivant que p est pair ou impair, et le terme $\frac{h^p}{1.2\ldots p}F^p(k)$ est précédé, dans le développement précédent, du signe $+$ dans le premier cas, du signe $-$ dans le second. Donc $F(k-h)$, étant une somme de termes tous de même signe, ne peut être nul.

MOUVEMENT D'UN POINT PESANT ATTIRÉ PAR UN POINT FIXE SUIVANT LA LOI DE NEWTON;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Le *Bulletin des Sciences mathématiques* contient, dans son numéro de juin 1891, une étude posthume de Cellérier sur le mouvement d'un point pesant attiré vers un centre fixe O par une force réciproque au carré de la distance. L'analyse du savant génevois est très ingénieuse, mais difficile à retrouver et à imiter. Or, le problème est de ceux dont la solution s'obtient avec une facilité remarquable à l'aide des équations d'Hamilton et de Jacobi; je vais la développer à ce point de vue, en complétant quelques résultats de Cellérier, sauf à laisser de côté une discussion difficile qu'il entame et dont l'intérêt est surtout analytique.

Prenons trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, dont le dernier est dirigé dans le sens de la pesanteur; soient x, y, z les coordonnées du point mobile M, r et ρ ses distances à l'origine et à l'axe OZ. En M passent deux paraboloïdes ayant OZ pour axe de révolution, O pour foyer et

$$x^2+y^2=\lambda^2+2\lambda z, \qquad x^2+y^2=\mu^2-2\mu z$$

pour équations respectives : λ, μ sont positifs et l'on a

$$\rho^2=\lambda\mu, \qquad r=\frac{\lambda+\mu}{2}, \qquad z=\frac{\mu-\lambda}{2}.$$

La position du point M peut être définie par les valeurs de λ, μ et de son azimut φ : faisant la masse égale

à l'unité, j'ai pour la demi-force vive

$$T = \frac{1}{2}(\rho'^2 + z'^2 + \rho^2\varphi'^2) = \frac{\lambda+\mu}{8}\left(\frac{\lambda'^2}{\lambda} + \frac{\mu'^2}{\mu}\right) + \frac{\lambda\mu}{2}\varphi'^2.$$

Introduisons les variables d'Hamilton

$$(1) \qquad \begin{cases} p = \dfrac{\partial T}{\partial \lambda'} = \dfrac{\lambda+\mu}{4\lambda}\lambda', \\ p_1 = \dfrac{\partial T}{\partial \mu'} = \dfrac{\lambda+\mu}{4\mu}\mu', \\ p_2 = \dfrac{\partial T}{\partial \varphi'} = \lambda\mu\varphi'. \end{cases}$$

Si, dans T, je remplace λ', μ', φ' par leurs valeurs tirées des équations (1), il vient

$$(2) \qquad T = \frac{2\lambda}{\lambda+\mu}p^2 + \frac{2\mu}{\lambda+\mu}p_1^2 + \frac{\lambda\mu}{2}p_2^2.$$

Il existe une fonction des forces

$$U = gz + \frac{k}{x} = g\frac{\mu-\lambda}{2} + \frac{2k}{\lambda+\mu}.$$

Cela posé, l'équation dont, suivant le théorème de Jacobi, il suffirait de connaître une intégrale complète pour en déduire, par de simples différentiations, toutes les intégrales du problème est de la forme $(T) - U + \frac{\partial V}{\partial t} = 0$, (T) désignant l'expression obtenue en remplaçant, dans la valeur (2) de T, p, p_1, p_2 par $\frac{\partial V}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial V}{\partial \mu}$, $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$: on trouve ainsi l'équation

$$\frac{2\lambda}{\lambda+\mu}\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)^2 + \frac{2\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\partial V}{\partial \mu}\right)^2 + \frac{1}{2\lambda\mu}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 + g\frac{\lambda-\mu}{2} - \frac{2k}{\lambda+\mu} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

qui détermine V en fonction de λ, μ, φ, t ; mais, comme φ et t n'y figurent pas explicitement, on pourra

trouver une intégrale en posant

$$(3) \qquad V = S + a\varphi - ht,$$

S désignant une fonction inconnue de λ et μ seuls, a et h deux constantes dont la seconde est celle des forces vives. Dans l'équation de Jacobi, je remplace V et ses dérivées par leurs valeurs déduites de l'équation (3), puis je multiplie tous les termes par $\lambda + \mu$: j'obtiens l'équation à deux variables indépendantes

$$2\lambda\left(\frac{\partial S}{\partial \lambda}\right)^2 + 2\mu\left(\frac{\partial S}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right)\frac{a^2}{2}$$
$$+ g\,\frac{\lambda^2 - \mu}{2} - 2k - (\lambda + \mu)h = 0.$$

Cette équation, de forme bien connue, peut être satisfaite en posant

$$S = \psi(\lambda) + \psi_1(\mu),$$

et, b désignant une troisième constante arbitraire,

$$2\lambda\psi'^2(\lambda) + \frac{a^2}{2\lambda} + g\,\frac{\lambda^2}{2} - k - \lambda h = b,$$
$$2\mu\psi_1'^2(\mu) + \frac{a^2}{2\mu} - g\,\frac{\mu^2}{2} - k - \mu h = -b;$$

ψ, ψ_1 se déterminent à l'aide de quadratures et on a l'intégrale

$$V_1 = a\varphi - ht + \frac{1}{2}\int \frac{d\lambda}{\lambda}\sqrt{F(\lambda)} + \frac{1}{2}\int \frac{d\mu}{\mu}\sqrt{F_1(\mu)},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$(4) \qquad \begin{cases} F(\lambda) = -g\lambda^3 + 2h\lambda^2 + 2(k+b)\lambda - a^2, \\ F_1(\mu) = g\mu^3 + 2h\mu^2 + 2(k-b)\mu - a^2. \end{cases}$$

Il suffirait d'ajouter à V_1 une quatrième constante pour former une intégrale complète de l'équation de Jacobi, mais il est inutile de l'écrire. La trajectoire C est repré-

sentée par deux équations de la forme

$$\frac{\partial V_1}{\partial b} = b_1, \qquad \frac{\partial V_1}{\partial a} = a_1,$$

ou, en considérant les coordonnées initiales λ_0, μ_0, φ_0,

$$(5) \qquad \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{F_1(\mu)}},$$

$$(6) \qquad \varphi - \varphi_0 = \frac{a}{2} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{F(\lambda)}} + \frac{a}{2} \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\mu\sqrt{F_1(\mu)}}.$$

Le temps au bout duquel le mobile arrive en un point déterminé de C est donné, suivant une règle également connue, par la formule

$$(7) \qquad t = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\lambda\, d\lambda}{2\sqrt{F(\lambda)}} + \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\mu\, d\mu}{2\sqrt{F_1(\mu)}}.$$

Nous avons enfin trois intégrales premières

$$\frac{\partial V_1}{\partial \lambda} = p, \qquad \frac{\partial V_1}{\partial \mu} = p_1, \qquad \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} = p_2,$$

d'où l'on tire, après avoir remplacé p, p_1, p_2 par leurs valeurs (1),

$$(8) \qquad \lambda' = \frac{2}{\lambda + \mu}\sqrt{F(\lambda)},$$

$$(9) \qquad \mu' = \frac{2}{\lambda + \mu}\sqrt{F_1(\mu)},$$

$$(10) \qquad \varphi' = \frac{a}{\lambda\mu}.$$

L'équation (8) prouve que le radical $\sqrt{F(\lambda)}$ doit toujours être réel : il faudra, suivant l'époque à laquelle on se placera, le prendre avec sa valeur arithmétique ou avec cette valeur changée de signe; mais on adoptera la même détermination dans toutes les formules. On en dira autant pour $\sqrt{F_1(\mu)}$.

Les équations (8), (9), (10), appliquées à l'instant initial, permettent de calculer les constantes a, b, h en fonction de λ_0, μ_0, λ'_0, μ'_0, φ'_0, qui sont données ou qui se déduisent de x_0, x'_0, ...; après avoir remplacé a, b, h par leurs valeurs dans les équations (4), on pourra écrire $F(\lambda)$ et $F_1(\mu)$ sous les formes suivantes

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} F(\lambda) &= (\lambda-\lambda_0)\left[\frac{\lambda_0+\mu_0}{4}\left(\frac{\lambda_0'^2}{\lambda_0}+\frac{\mu_0'^2}{\mu_0}\right)\lambda - \frac{4k\lambda}{\lambda_0+\mu_0}\right. \\ &\qquad \left. + (\mu_0+\lambda)(\lambda_0\mu_0\varphi_0'^2 - g\lambda)\right] \\ &\quad + \frac{(\lambda_0+\mu_0)^2}{4\lambda_0}\lambda_0'^2\lambda, \\ F_1(\mu) &= (\mu-\mu_0)\left[\frac{\lambda_0+\mu_0}{4}\left(\frac{\lambda_0'^2}{\lambda_0}+\frac{\mu_0'^2}{\mu_0}\right)\mu - \frac{4k\mu}{\lambda_0+\mu_0}\right. \\ &\qquad \left. + (\lambda_0+\mu)(\lambda_0\mu_0\varphi_0'^2 + g\mu)\right] \\ &\quad + \frac{(\lambda_0+\mu_0)^2}{4\mu_0}\mu_0'^2\mu. \end{aligned} \right.$$

L'équation (10) montre que φ varie toujours dans le même sens et que λ, μ ne s'annulent pas, sauf le cas où M resterait dans un plan fixe passant par OZ; nos résultats s'appliquent à ce cas, en y supposant seulement $\varphi = 0$.

Nous avons vu que $F(\lambda)$ ne doit jamais devenir négatif; ce polynôme, positif pour $\lambda = \lambda_0$, négatif pour $\lambda = 0$ et pour $\lambda = +\infty$, a toujours deux racines positives, α, α', entre lesquelles λ doit rester compris; C est située dans la région E, qui s'étend indéfiniment vers le bas et qui est comprise entre les paraboloïdes (α), (α') correspondant à $\lambda = \alpha$ et à $\lambda = \alpha'$. Si les racines α, α' sont égales, leur valeur sera celle de λ_0 et l'équation (11) montre qu'on aura les deux conditions

$$(12)\quad \lambda'_0 = 0, \qquad \mu_0'^2 + 4\mu_0^2\varphi_0'^2 - \frac{16k\mu_0}{(\lambda_0+\mu_0)^2} - 4g\mu_0 = 0;$$

λ restera égal à λ_0 et les intégrales en λ qui figurent dans les équations (5), (6), (7) n'auront plus de sens; mais, dans ce cas, les équations (9) et (10) permettront de calculer t et φ en fonction de μ à l'aide de deux quadratures.

Revenons au cas où les limites α, α' sont différentes : l'équation (8) montre que λ atteindra l'une d'elles, α par exemple, au bout d'un temps fini : on peut se demander s'il ne restera pas ensuite égal à α, ce qui, on le voit aisément, ne serait pas en contradiction avec nos formules; λ' et λ'' seraient nulles à partir de l'instant considéré. Or, des équations (8) et (9) on déduit

$$\lambda'' = \frac{\lambda' F'(\lambda)}{(\lambda+\mu)\sqrt{F(\lambda)}} - \frac{2(\lambda'+\mu')\sqrt{F(\lambda)}}{(\lambda+\mu)^2}$$
$$= \frac{2F'(\lambda)}{(\lambda+\mu)^2} - 4\,\frac{F(\lambda)+\sqrt{F(\lambda)F_1(\mu)}}{(\lambda+\mu)^3};$$

si λ' et λ'' s'annulaient pour $\lambda = \alpha$, $F(\alpha)$, $F'(\alpha)$ seraient nuls et α serait racine double, contrairement à notre hypothèse : on en conclut que λ oscillera indéfiniment entre α et α', M entre les paraboloïdes (α), (α') qu'il touchera tour à tour.

Pas plus que $F(\lambda)$, $F_1(\mu)$ ne peut devenir négatif, mais il y aura deux cas à distinguer quand on considère les limites entre lesquelles μ peut varier, et à ces deux cas correspondent des mouvements très différents. $F_1(\mu)$, négatif pour $\mu = 0$, positif pour $\mu = \infty$, peut avoir trois racines, $\beta > \beta' > \beta'' > 0$; μ ne pourra prendre que des valeurs comprises entre β'' et β' ou entre β et ∞. Si μ_0 est compris entre β'' et β', μ restera entre les mêmes limites et, en raisonnant comme ci-dessus, on verra qu'il oscille de l'une à l'autre; M qui, dans tous les cas, doit rester dans la région E, ne sortira pas d'un espace annulaire fermé, compris entre les paraboloïdes (α), (α') et

les paraboloïdes (β'), (β'') qui correspondent à $\mu = \beta'$, $\mu = \beta''$. Pour que C soit une courbe fermée, il faut et il suffit qu'il existe des entiers m, m', m'' tels que l'on ait

$$m \int_{\alpha'}^{\alpha} \frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}} = m' \int_{\beta''}^{\beta'} \frac{d\mu}{\sqrt{F_2(\mu)}},$$

$$\left[m \int_{\alpha'}^{\alpha} \frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{F(\lambda)}} + m' \int_{\beta''}^{\beta'} \frac{d\mu}{\mu\sqrt{F_1(\mu)}} \right] \frac{\lambda_0 \mu_0 \varphi'_0}{2} = 2m''\pi.$$

Lorsque μ_0 est $> \beta$, μ peut varier entre β et ∞, mais il ne peut devenir infini qu'au bout d'un temps infini ; M, restant dans la région E et au-dessous du paraboloïde (β), s'éloignera indéfiniment du côté des z positifs. Si $F_1(\mu)$ avait une seule racine positive β, μ_0 serait nécessairement supérieur à β et tout ce qui vient d'être dit resterait applicable.

Considérons le cas où $F_1(\mu)$ aurait deux racines égales, et d'abord celui où β' serait égal à β'' : si μ_0 est $> \beta$, le mouvement de M sera analogue à celui que j'ai esquissé en dernier lieu ; mais si μ_0 doit être $< \beta$, la seule valeur qu'on pourra lui assigner sera β'' et μ restera constant : C serpentera sur le paraboloïde (β) entre les cercles d'intersection de cette surface avec les paraboloïdes (α) et (α'). On aura d'ailleurs deux équations de condition, analogues aux équations (12),

$$(12\ bis) \quad \mu'_0 = 0, \qquad \lambda_0'^2 + 4\lambda_0^2\varphi_0'^2 - \frac{16k\lambda_0}{(\lambda_0 + \mu_0)^2} + 4g\lambda_0 = 0.$$

Supposons maintenant $\beta' = \beta$, mais $\mu_0 = \beta$; lorsque μ aura commencé à s'approcher de la valeur β, il continuera à s'en rapprocher de plus en plus, mais il ne l'atteindra que pour des valeurs infinies de t et de φ ; le paraboloïde (β) est une surface asymptotique à C. Si au contraire μ avait d'abord la valeur $\beta = \beta'$, il la conserverait indéfiniment ; mais la moindre action extérieure suffirait pour qu'il s'en écarte d'une quantité finie ou

même infinie, tandis que dans le cas de $\beta' = \beta''$ une pareille action n'éloignerait que très peu μ de la valeur β''.

Il pourrait se faire que λ_0 fût racine double de $F(\lambda)$ en même temps que μ_0 le serait de $F_1(\mu)$; M décrirait un cercle horizontal; des équations (12) et (12 *bis*) on tirerait

$$\lambda'_0 = \mu'_0 = 0, \qquad \frac{\mu_0 z_0}{r_0^3} = g, \qquad \frac{\mu_0 \rho_0}{r_0^3} = \rho_0 \varphi_0'^2,$$

relations faciles à interpréter et à démontrer directement.

Je dis enfin que, lorsque C a une branche infinie, cette branche est asymptote à une parabole. Quand μ devient infini, les intégrales relatives à cette variable, qui figurent dans les équations (5) et (6), restent finies, en sorte que λ et φ tendent vers des limites λ_1, φ_1. Les points de l'espace pour lesquels λ est égal à λ_1 et à φ à φ_1 sont sur une parabole P qui a pour axe OZ. Comparons les positions des points M, M_1 où les branches de C et de P qui sont dans la même région coupent le paraboloïde correspondant à une valeur très grande, m, de μ. Sur C, pour $\mu = m$, on a $\lambda = \lambda_1 - \varepsilon$ et je supposerai, pour fixer les idées, ε positif. L'équation (5) est applicable en prenant $\lambda_1 - \varepsilon$ et λ_1, μ et ∞ pour limites respectives de λ et de μ; entre ces limites on peut, à $F(\lambda)$ et à $F_1(\mu)$, substituer les quantités $F(\lambda_1)$ et $g\mu^3$ dont les rapports avec les premières sont très voisins de l'unité; l'intégration devient facile et donne, sans erreur appréciable, $\varepsilon = \frac{2\sqrt{F(\lambda_1)}}{\sqrt{mg}}$. Les z des points M_1, M peuvent être considérés comme égaux; la différence de leurs distances ρ_1, ρ à OZ est, en ne retenant désormais de chaque expression que sa partie principale

$$\sqrt{m\lambda_1} - \sqrt{m(\lambda_1 - \varepsilon)} = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{m}{\lambda_1}} = \frac{\sqrt{F(\lambda_1)}}{\sqrt{g\lambda_1}}.$$

L'équation (6), avec des simplifications analogues aux précédentes, donne la différence des azimuts

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{a}{2}\left[\frac{\varepsilon}{\lambda_1\sqrt{F(\lambda_1)}} = \frac{2}{3\sqrt{gm^3}}\right] = \frac{a}{\lambda_1\sqrt{mg}}.$$

La distance du point M au plan de P est sensiblement égale à $(\varphi_1 - \varphi)\rho$ ou à $\frac{a}{\sqrt{g\lambda_1}}$; cette quantité, comme $\rho_1 - \rho$, est indépendante de M. De ce qui précède il résulte qu'à l'infini C se confond avec la parabole P à laquelle on aurait fait subir deux translations, l'une égale à $\sqrt{\frac{F(\lambda_1)}{g\lambda_1}}$ dirigée vers OZ, l'autre égale à $\frac{a}{\sqrt{gr_1}}$ normale au plan de P elle-même.

ERRATA A L' « ALGÈBRE SUPÉRIEURE » DE SALMON.

Traduction française de M. O. CHEMIN.
(Paris, Gauthier-Villars et fils; 1890.)

Page 503, ligne 2, le coefficient de a^2c^2 *est*

$$2AE^3 - 2BDE^2 + C^2E^2,$$

et non

$$-2BDE^2 + C^2E^2.$$

Page 503, ligne 6, le coefficient de a^2e^2 *est*

$$6A^2E^2 - 8ABDE - 4AC^2E + \ldots,$$

et non

$$4A^2E^2 - 9ABDE - 2AC^2E + \ldots.$$

Page 503, ligne 32, le coefficient de c^2e^2 *est*

$$2A^3E - 2A^2BD + A^2C^2,$$

et non

$$-2A^2BD + A^2C^2.$$

(Communiqué par M. HENRI VALDÈS.)

SUR LE CENTRE DE COURBURE DE LA PARABOLE;

Par M. LEMAIRE.

On sait que, si d'un point on mène les trois normales à une parabole, leurs pieds sont sur un cercle passant par le sommet de la courbe.

Il est facile de voir que réciproquement, si un cercle passe par le sommet d'une parabole, la normale à la parabole aux trois autres points où le cercle la rencontre passe par un même point.

En supposant que deux de ces trois derniers points se confondent en A, le troisième étant B, on obtient cette propriété :

Si un cercle passant par le sommet d'une parabole est tangent à la courbe en A et la coupe en B, la normale en B à la courbe passe par le centre de courbure de la parabole au point A.

Cette remarque fournit une construction très simple du centre de courbure d'une parabole en un point A de cette courbe :

Soient, en effet, S le sommet de la courbe, AT la tangente en A, AN la normale, AP l'ordonnée, AC le diamètre passant par A; D le symétrique de B, AT et SB étant également inclinées sur l'axe de la parabole, AT et SD sont parallèles.

On a, par suite, R étant le point où BD coupe l'axe,

$$BR = DR = 2AP$$

et

$$SR = 4SP,$$

d'où la construction suivante :

On prendra $SR = 4SP$, puis on mènera à l'axe de

l'autre côté par rapport à A une perpendiculaire BR double de AP. Prenant enfin, sur l'axe, RL = PN, la normale LB en B rencontrera AN en ω, centre de courbure de la parabole au point A.

SUR LES SÉRIES A TERMES POSITIFS ;

PAR M. V. JAMET.

(Extrait des *Comptes rendus*, t. CXIV, p. 57; 11 janvier 1892.)

---

1. Soit $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ une série dont les termes, tous positifs, tendent vers zéro, quand leur rang est de plus en plus élevé. Je suppose qu'en même temps l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ tende vers l'unité, et je me propose de signaler un cas étendu où, dans ces conditions, la série est convergente. Mais d'abord j'observe que, si l'on pose

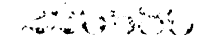
$$\sqrt[n]{u_n} = 1 - \alpha_n,$$

le produit $n\alpha_n$ doit croître au delà de toute limite, bien que le facteur α_n soit infiniment petit. En effet, d'après l'égalité précédente,

$$u_n = (1 - \alpha_n)^n = \left[(1 - \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}\right]^{n\alpha_n}.$$

Mais $(1 - \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}$ a pour limite $\frac{1}{e}$. Si donc $n\alpha_n$ tendait vers une limite k, finie ou nulle, u_n tendrait vers une limite e^{-k}, différente de zéro, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Cette remarque me conduit à examiner le cas où il existe un nombre p, compris entre zéro et 1, tel que le produit $n^{1-p}\alpha_n$ tende vers une limite; je dis que *la série sera convergente chaque fois que cette limite ne sera pas nulle*. En effet, l'égalité précédente équivaut à



celle-ci

$$u_n = \left\{ \left[(1-\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} \right]^{n^{1-p}\alpha_n} \right\}^{n^p}.$$

Soit $\lim n^{1-p}\alpha_n = h$. L'expression que nous élevons à la puissance n^p tend vers $\frac{1}{e^h}$, et par conséquent devient, à partir d'une certaine valeur de n, inférieure à un nombre a, compris entre 1 et $\frac{1}{e^h}$. Dès ce moment, les termes de la série sont inférieurs à ceux de la série suivante

$$\text{(A)} \qquad a^{n^p},\ a^{(n+1)^p},\ \ldots,\ a^{(n+i)^p},\ \ldots,$$

dont on augmentera encore les termes en remplaçant p par l'inverse d'un nombre entier q, supérieur à $\frac{1}{p}$, et tout revient à démontrer que la série (A), modifiée de la sorte, est convergente. A cet effet, observons que, à partir d'un rang déterminé, nous pourrons grouper les termes de telle sorte que, dans le premier terme de chaque groupe, l'exposant de a soit un nombre entier. Les groupes successifs se présenteront alors comme il suit :

$$\begin{array}{lllll} a^k, & a^{\sqrt[q]{kq+1}}, & a^{\sqrt[q]{kq+2}}, & \ldots, & a^{\sqrt[q]{(k+1)q-1}}, \\ a^{k+1}, & a^{\sqrt[q]{(k+1)q+1}}, & \ldots, & \ldots, & a^{\sqrt[q]{(k+2)q-1}}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{array}$$

et la somme des termes du groupe commençant par a^r sera inférieure à

$$[(r+1)^q - r^q]\,a^r.$$

Mais les séries

$$\sum_{r=k}^{r=\infty} (r+1)^q a^r, \qquad \sum_{r=k}^{r=\infty} r^q a^r$$

sont convergentes, puisque, dans chacune d'elles, le

rapport d'un terme au précédent a pour limite a. Donc, il en est de même de la série (A), et aussi de la série donnée.

2. La démonstration précédente subsiste *alors même que $n^{1-p}\alpha_n$ tend vers l'infini positif,* pour une certaine valeur de p, positive et inférieure à 1, ou pour diverses valeurs de p comprises entre ces limites. C'est ce qui arrive, par exemple, si l'on a

$$\alpha_n = \frac{\log n}{n^k} = \frac{1}{k}\,\frac{\log n^k}{n^k},$$

k désignant un nombre compris entre zéro et 1. On voit d'abord que α_n tend vers zéro quand n croît indéfiniment, parce que la fonction $\frac{\log x}{x}$ tend vers zéro quand x croît au delà de toute limite. Mais, si l'on fait $p = 1 - k$, on trouve

$$n^{1-p}\alpha_n = \log n,$$

et l'on en conclut que la série

$$\sum^{n=\infty}\left(1 - \frac{\log n}{n^k}\right)^n \qquad (0 < k < 1)$$

est convergente. Si l'on avait $k \leqq 1$, la série serait divergente, comme nous allons le démontrer. Mais, tout d'abord, nous justifierons le choix de cet exemple en montrant que nous sommes bien dans un cas où il est impossible de trouver un nombre p, satisfaisant aux conditions énoncées. En effet, pour toute valeur positive de p,

$$n^{1-p}\alpha_n = \frac{\log n}{n^{k+p-1}} = \frac{1}{k+p-1}\,\frac{\log n^{k+p-1}}{n^{k+p-1}}.$$

Il est donc bien vrai que, dans l'exemple actuel, $n^{1-p}\alpha_n$ tend vers zéro pour toute valeur comprise entre zéro et 1.

Quant à la divergence de la série, il suffit de la démontrer dans l'hypothèse où $k = 1$, puisque son terme général augmente avec k; et la proposition sera établie si je fais voir que, dans cette hypothèse, nu_n a pour limite 1, ou que $\log n + \log u_n$ a pour limite zéro. Or

$$\log u_n = n \log\left(1 - \frac{\log n}{n}\right)$$

$$= -n\left[\frac{\log n}{n} + \frac{\log^2 n}{2n^2\left(1 - \theta\,\frac{\log n}{n}\right)^2}\right],$$

θ désignant un nombre compris entre zéro et 1. Ceci résulte du développement de $\log(1 + x)$ par la formule de Maclaurin. Donc

$$\text{(B)} \qquad \log n + \log u_n = -\frac{\log^2 n}{2n\left(1 - \theta\,\frac{\log n}{n}\right)^2}.$$

Mais $\frac{\log^2 n}{n}$ a pour racine carrée

$$\frac{\log n}{\sqrt{n}} = 2\,\frac{\log\sqrt{n}}{\sqrt{n}},$$

et cette expression tend vers zéro, quand n croît au delà de toute limite. Donc, le second membre de l'égalité (B) tend vers zéro. C. Q. F. D.

3. Revenons maintenant à la série (A). Nous avons démontré qu'elle est convergente, quand a est inférieur à 1; si a est supérieur à 1, elle est manifestement divergente; et en procédant comme on le fait pour démontrer la règle de convergence due à Cauchy $(\sqrt[n]{u_n})$, on arrivera à la règle suivante :

La série à termes positifs

$$u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad \ldots,\quad u_n,\quad \ldots$$

sera convergente, s'il existe un nombre positif p, tel que l'expression $u_n^{\frac{1}{n^p}}$ tende vers une limite inférieure à 1. Elle sera divergente, s'il existe un nombre p, positif, tel que cette expression tende vers une limite supérieure à 1, quand n croît indéfiniment.

BIBLIOGRAPHIE.

Mémoire sur l'interprétation des symboles *dits imaginaires*, ou Théorie des acceptions, avec ses applications en Algèbre et en Géométrie. — Extrait principalement des travaux inédits de feu l'*abbé George*, par *J. Évrard*, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées en retraite. Paris, Baudry et Cie, 1891 (¹).

I. *Représentation linéaire des quantités et expression analytique correspondante. — Module, acception. — Conséquences.* — Une quantité positive, exprimée arithmétiquement par un nombre, entier ou fractionnaire, d'unités de même espèce et de nature quelconque (longueurs, surfaces, volumes, poids, forces, vitesses, etc.,) peut toujours être représentée graphiquement par une longueur OA déterminée d'après une échelle convenue et portée à partir d'un point O sur une droite indéfinie OX.

Si la même quantité doit être prise négativement, il est

(¹) L'abbé George a déjà été nommé dans les *Nouvelles Annales*. Dès 1845, M. O. Terquem annonçait (t. IV, p. 616) l'insertion à bref délai d'une lettre qui n'a pas été publiée pour des motifs étrangers à la Science (Mémoire de M. Évrard, p. 223). Nous avons voulu réaliser l'intention de notre prédécesseur en laissant à M. Évrard le soin de faire lui-même une analyse rapide, mais substantielle, du Mémoire dans lequel ce savant ingénieur a entrepris de donner une forme définitive au développement des idées de l'abbé George.

E. R.

admis que sa représentation graphique devra être portée en sens contraire à partir de O, en OA′ vers X′, et que OA et OA′ auront respectivement pour expression analytique, en appelant A le nombre d'unités considéré,

$$OA = +A \quad \text{et} \quad OA' = -A,$$

ou

$$OA = A(+1) \quad \text{et} \quad OA' = A(-1),$$

c'est-à-dire que les directions positive et négative sont respectivement caractérisées par les coefficients $(+1)$ et (-1).

A cause de $[(+1) = (-1)^0]$ et $[(-1) = (-1)^1]$, ces deux coefficients ne sont que les valeurs correspondant à $\varphi = 0$ et $\varphi = 1$ de l'exponentielle $(-1)^\varphi$. Si l'on suppose que l'exposant φ aille en croissant par degrés continus de 0 à 1, en prenant les valeurs successives d'un arc de cercle de centre O et de rayon OA, mesuré à partir de A et exprimé en fonction de la demi-circonférence prise pour unité, le rayon du cercle représenté par OM correspondra à la valeur de l'exposant φ représentée par l'arc AM, et l'on pourra écrire

$$OM = A(-1)^\varphi$$

pour expression analytique d'une quantité représentée suivant l'une quelconque des directions partant du point O et comprise avec OX dans un plan unique, que l'on qualifiera d'*horizontal*, pour abréger, sans que cela implique rien quant à sa situation absolue.

On aura en particulier, pour la quantité représentée suivant la direction OP, symétrique de OM par rapport à OA,

$$OP = A(-1)^{2-\varphi} = A(-1)^2(-1)^{-\varphi} = A(-1)^{-\varphi}.$$

Mais

$$[\varphi = \varphi(+1) = \varphi(-1)^0],$$

et

$$[-\varphi = \varphi(-1) = \varphi(-1)^1].$$

On peut donc écrire aussi

$$OM = A(-1)^{\varphi(-1)^0}, \qquad OP = A(-1)^{\varphi(-1)^1},$$

c'est-à-dire que les deux coefficients de A, dans OM et OP, ne sont que les valeurs correspondant à $\varphi' = 0$ et $\varphi' = 1$, de la double exponentielle $(-1)^{\varphi(-1)^{\varphi'}}$.

Si donc on suppose que, l'angle MOX demeurant constant, le rayon OM sorte du plan horizontal et décrive autour de OX un cône à base circulaire, il est clair que, quand OM sera parvenu en OM' dans un plan M'OX incliné de φ' sur le plan horizontal, le point M aura décrit un arc de même amplitude, mesuré à partir de M sur la circonférence de la base du cône, et exprimé en fonction de la demi-circonférence MM'P prise pour unité. On aura donc, pour l'expression analytique de OM',

$$\text{OM}' = \text{A}(-1)^{\varphi(-1)^{\varphi'}}.$$

Il est à la fois plus commode et plus conforme à l'usage d'évaluer les inclinaisons en prenant pour unité le quadrant, correspondant à l'angle droit, plutôt que la demi-circonférence. Désignant donc par α et α' des nombres ayant avec l'unité le même rapport que les arcs AM et MM' avec le quadrant, on aura d'abord

$$\text{OM}' = \text{A}(-1)^{\frac{\alpha}{2}(-1)^{\frac{\alpha'}{2}}}.$$

puisqu'on doit avoir le même résultat pour $(\varphi = \varphi' = 1)$ ou pour $(\alpha = \alpha' = 2)$.

Afin d'éviter l'aspect fractionnaire des exposants, ayant égard à l'équivalence algébrique $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$, on écrira définitivement

$$\text{(D)} \qquad \text{OM}' = \text{A}\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$$

pour l'expression analytique d'une quantité dont la représentation linéaire serait définie par des valeurs déterminées de A, α et α'.

Cette expression se compose de deux éléments :

1° Le *module* A, correspondant à la *grandeur;*

2° L'*acception* $\left(\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ correspondant à la *direction* ou à l'*orientation* de la représentation linéaire de la quantité considérée.

Pour $\alpha' = 0$, l'acception se réduit à $\sqrt{-1}^{\alpha}$ et sera dite *acception simple.*

Pour chaque valeur de α', l'acception qui peut s'écrire $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\alpha}$ sera dite *acception réflexe.*

$(\sqrt{-1})$ et $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ sont les *bases* de l'acception *simple* et de l'acception *réflexe*.

Le *symbole général d'acception* est l'expression *algébrique* des racines de l'unité (*Mémoire*, n° 4). Il se réduit notamment à :

± 1 pour l'axe des x.......... par ($\alpha' = 0$, $\alpha = 0$ ou 2);
$\pm\sqrt{-1}$ pour l'axe des y, ou pour la perpendicularité *simple*... par ($\alpha' = 0$, $\alpha = 1$ ou 3);
$\pm\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ pour l'axe des z, ou pour la perpendicularité *double*.................... par ($\alpha' = 1$, $\alpha = 1$ ou 3);

Les propriétés *géométriques* des symboles $(\sqrt{-1})$ et $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ n'apparaissent, on le voit, que comme *conséquences* de valeurs particulières attribuées aux variables α et α'. Elles ne sont pas *préjugées a priori.*

Le symbole $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ dérive d'ailleurs du symbole général. Il n'est nullement engendré par l'*élévation de* $(\sqrt{-1})$ *à la puissance* $(\sqrt{-1})$, et suivant l'expression d'Argand (*Argand*, réédité par *Houël*, p. 95), il est aussi *hétérogène* par rapport à $(\sqrt{-1})$ que $(\sqrt{-1})$ par rapport à $(+1)$.

Toutes les quantités comprises dans la forme générale $A\left(\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ étant susceptibles de représentation linéaire, sont donc aussi *visibles*, aussi *tangibles*, par conséquent aussi *réelles* et aussi *peu imaginaires* les unes que les autres.

Mais on montrera (*Mémoire*, n°s 10, 71 à 74) que toute fonction de $\sqrt{-1}$ est réductible à cette forme. Sous le bénéfice de cette vérification *a posteriori*, on peut dire avec l'abbé George : *Il n'y a pas de quantités imaginaires.*

Dans les formules algébriques ou trigonométriques ordinaires, les arcs sont exprimés en fonction du rayon pris pour unité. Il est facile d'introduire cette hypothèse dans la notation du symbole d'acception. Désignant par a et a' les arcs rectifiés correspondant à α et α', on aura

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{a}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{\pi}, \qquad \frac{\alpha'}{1} = \frac{a'}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a'}{\pi}$$

et, par conséquent, les exponentielles deviendront

$$\sqrt{-1}^{\frac{2a}{\pi}}, \qquad \sqrt{-1}^{\frac{2a}{\pi}\sqrt{-1}^{\frac{2a'}{\pi}}}.$$

On ne recourra à cette forme plus compliquée que dans le cas de rapprochement avec les formules algébriques ou trigonométriques ordinaires.

II. *Calcul des acceptions.* — L'expression (D) ayant été établie algébriquement, les règles ordinaires du calcul algébrique doivent lui être applicables.

Mais la forme du symbole général d'acception, c'est-à-dire la *double exponentielle* $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$, étant nouvelle en Analyse, il est à prévoir qu'en l'introduisant dans le calcul on rencontrera des notions ou propositions également nouvelles dont il n'y aura qu'à prendre acte à mesure qu'on les constatera, pour en tenir tel compte que de raison.

Calcul des expressions analytiques considérées comme éléments de sommes. — Composition des droites. — L'opération de la composition géométrique des droites se résume (n° 7) par l'équation

$$R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}} = \Sigma A \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$$

qui, pour un contour fermé, se réduira à

$$\Sigma \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = 0.$$

L'élément symbolique $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ se traduit d'ailleurs trigonométriquement (n° 8) par la formule trinôme, élémentaire et fondamentale

$$\text{(F)} \quad \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha\sin\alpha',$$

à l'aide de laquelle la première équation peut se développer (n° 9) et s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} &(R\cos\rho - \Sigma A\cos\alpha) \\ &\quad + \sqrt{-1}\,(R\sin\rho\cos\rho' - \Sigma A\sin\alpha\sin\alpha') \\ &\quad + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}(R\sin\rho\sin\rho' - \Sigma A\sin\alpha\sin\alpha') = 0, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire sous la forme

$$L + M\sqrt{-1} + N\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = 0,$$

impliquant à la fois $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, puisque la projection de la résultante est égale à la somme des projections des composantes sur chacun des trois axes coordonnés.

La relation fondamentale (F) devient (n° 11) pour les directions comprises dans chacun des plans coordonnés :

1° Plan des xy ($z = 0$, $\alpha' = 0$),

$$(f_1) \qquad \sqrt{-1}^{\alpha} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$$

(à rapprocher de la formule d'Euler);

2° Plan des xz ($y = 0$, $\alpha' = 1$),

$$(f_2) \qquad \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha;$$

3° Plan des yz ($x = 0$, $\alpha = 1$),

$$(f_3) \qquad \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}} = \sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha'.$$

Mais (n° 14) la relation (F) peut aussi bien s'écrire

$$\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\alpha} = \cos\alpha + \left(\sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha'\right)\sin\alpha,$$

ou, d'après (f_3)

$$(F') \qquad \left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\alpha} = \cos\alpha + \left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)\sin\alpha.$$

Sous cette forme binôme, on voit que (F') se déduirait directement de (f_1) en y remplaçant la *base* $\sqrt{-1}$ de l'acception *simple* par la *base* $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ de l'acception *réflexe*.

Si, d'autre part cependant, dans (f_1), on remplace α par $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$, on obtient

$$(F'') \qquad \sqrt{-1}^{\alpha\left(\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)} = \cos\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$$

relation dont le premier membre est identique avec celui de (F).

On est donc ainsi conduit à considérer les arcs ou angles d'expression $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$.

Étude des arcs ou angles prétendus imaginaires. — L'arc $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$, n'étant autre chose que l'arc α transporté du plan horizontal dans le plan d'inclinaison α' par une rotation autour de l'axe des x, est aussi *réel* que α, et ses lignes trigonométriques (n° 16) doivent être identiques avec celles de α comme *grandeur* ou *module*, et n'en différer que par l'*acception*.

Il s'ensuit que les expressions des *modules* des lignes trigonométriques en fonction du *module* de l'arc, telles que les séries de $\sin\alpha$ et de $\cos\alpha$, sont également invariables (n° 17), et que si l'on y remplace α par $(\alpha\sqrt{-1})$, on ne peut obtenir que des résultats dépourvus de sens.

Au contraire, dans l'exponentielle e^{α}, la même substitution conduit à la formule d'Euler. Mais, de cette formule même, on déduit (n° 18) son identité avec l'équation (f_1) des directions dans le plan horizontal, d'où résulte que l'acception *simple*, indépendamment de son expression *exponentielle*, a aussi une expression *logarithmique*, c'est-à-dire qu'on a la double équation

$$\sqrt{-1}^{\alpha} = e^{\alpha\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha.$$

Mais, si dans $\sqrt{-1}^{\alpha}$ et dans $(\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha)$ on substitue $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ à $\sqrt{-1}$, on obtient l'équation (F'). Il est donc légitime de faire la même substitution dans $e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}}$ et, par conséquent, d'écrire

$$\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\alpha} = e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}}.$$

Pour $\alpha = \alpha' = 1$, cette équation se réduit à

$$\text{(E)} \qquad \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}},$$

relation qui est en désaccord avec celle qui a cours dans l'enseignement, c'est-à-dire avec

$$\text{(E')} \qquad \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = \left(e^{-\frac{\pi}{2}} = 0{,}208\right).$$

L'équivalence (E), cependant, ne soulève pas (n° 21) les

mêmes contradictions que (E'). Celle-ci d'ailleurs se rectifie (*Mémoire,* n° 25, II) par l'application d'une nouvelle règle à laquelle conduit la discussion de ces contradictions, et qui peut se résumer brièvement comme suit (n° 23) :

Dans la représentation linéaire de $(L + M\sqrt{-1})$, M *est perpendiculaire à* L. *Si* M *devient* $(N + P\sqrt{-1})$ *avec* P *perpendiculaire à* N, *les deux éléments* (N *et* P) *de* M *doivent rester perpendiculaires à* L, *c'est-à-dire que* L *est perpendiculaire au plan de* N *et de* P, *en même temps que* P *est perpendiculaire au plan de* L *et de* N. *De sorte qae*

$$L + (M = N + P\sqrt{-1})\sqrt{-1}$$

doit s'écrire

$$(M + N\sqrt{-1} + P\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}),$$

au lieu de

$$(L + N\sqrt{-1} - P)$$

que donnerait la multiplication algébrique ordinaire.

Calcul des expressions analytiques considérées comme éléments de produits. — Composition des arcs. — On constate d'abord (n° 31) que les produits des acceptions de même réflexité obéissent à la règle générale de la multiplication algébrique, c'est-à-dire qu'ils sont indépendants de l'ordre des facteurs. Ces produits correspondent à la somme d'arcs mesurés sur la même circonférence.

En poursuivant (n° 32) par la recherche du produit de deux facteurs orthogonaux, l'un d'acception simple $\sqrt{-1}^{a}$, l'autre $\sqrt{-1}^{a'\sqrt{-1}}$, on est conduit à une seconde forme de l'acception réflexe $(\sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}})$, et (n° 33) à l'équivalence

$$(\sqrt{-1}^{a+\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}),$$

qui est la traduction algébrique de cette proposition qu'on arrive au pôle géographique par tous les méridiens.

Il s'ensuit (n° 34), pour la multiplication par $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ d'un binôme de forme $(M + N\sqrt{-1})$, une règle nouvelle qui se formule ainsi

$$(M + N\sqrt{-1})\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = \sqrt{M^2 + N^2}\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}.$$

En poursuivant jusqu'au cas le plus général de deux, trois, et enfin (n° 39) d'un nombre quelconque de facteurs de réflexité différente, on arrive à cette conséquence que les produits varient avec l'ordre de la multiplication, ce qui s'explique par le fait que la multiplication de facteurs de cette espèce est la traduction algébrique de l'opération géométrique de la *composition des arcs,* et que cette composition, contrairement à celle des droites, admet plusieurs résultantes qui varient avec l'ordre de l'introduction des facteurs.

D'où résulte (n° 41) que l'équation générale $\left[\Sigma\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}=0\right]$ qui symbolise cette opération, laquelle peut aussi s'appeler *addition sphérique,* doit être distinguée par un signe particulier, par exemple l'emploi des crochets [...], spécifiant que cette équation n'est pas une équation algébrique de nature ordinaire, et que l'ordre des termes n'y peut être indifféremment interverti.

III. *Méthode des acceptions. Conclusions.* — Du calcul des acceptions résulte naturellement une méthode générale pour la mise en équation et la résolution des questions de Géométrie analytique, par application des principes de la composition des droites et de la composition des arcs, en développant les équations de forme $\left(\Sigma\alpha\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}=0\right)$ qui caractérisent les contours rectilignes de la figure, et les équations de forme $\left[\Sigma\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}=0\right]$ qui symbolisent ses angles trièdres et polyèdres, dans le cas où ses éléments rectilignes ne sont pas tous situés dans le même plan.

Au point de vue pratique, cette méthode n'a qu'une faible importance, puisqu'on remarque (n° 88) que l'emploi direct des deux trigonométries sera souvent plus expéditif. Mais la concordance des résultats obtenus par l'une ou l'autre voie, constatée sur les nombreux exemples donnés dans le Mémoire, constitue en tout cas une *vérification expérimentale* de la valeur théorique de la méthode, et par conséquent de la théorie même des acceptions.

Or, le but principal de cette théorie, dans la pensée de son auteur, est d'écarter de la Science la notion de l'*imaginaire,* ou la distinction des quantités en *réelles* et *imaginaires,* en y substituant la *distinction* des *quantités,* toujours *réelles,* par l'*acception* qui affecte le *module,* et qui spécifie la direc-

tion de leur représentation linéaire. Si la théorie est vraie, ce but est pleinement atteint, en même temps (n° 89) qu'il en résulte la rectification d'un grand nombre d'erreurs, de contradictions ou de paradoxes analytiques qui ont été successivement signalés dans le Mémoire.

Parmi ces erreurs, on a particulièrement relevé (n° 21) l'étrange équivalence (E′) déduite de la formule d'Euler, et qui repose sur *l'élévation d'une quantité à la puissance* $\sqrt{-1}$, opération évidemment dépourvue de sens. m étant quelconque (n° 29), on ne saurait dire ce que c'est que $m^{\sqrt{-1}}$; encore moins écrire avec conviction que

$$\left(m^{\sqrt{-1}}\right)^{\sqrt{-1}} = m^{\sqrt{-1}\sqrt{-1}} m^{-1} = \frac{1}{m}.$$

Si cependant la relation (E′), ou $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = \left[e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,208\right]$ était vraie, tout le calcul des acceptions et la méthode qui s'ensuit seraient renversés, puisque tout développement

$$\left(L + M\sqrt{-1} + N\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$$

se réduirait à

$$(L + 0,208\,N) + M\sqrt{-1}.$$

Mais calcul et méthode sont *vérifiés expérimentalement,* comme on vient de le dire.

On doit donc tenir pour condamnée une relation qui prend d'ailleurs un aspect quasi-grotesque quand on la traduit en termes concrets; car il en résulterait que

$$\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^{\text{m}} = 208 \text{ millimètres},$$

$$\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^{\text{kg}} = 208 \text{ grammes},$$

$$\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^{\text{fr}} = 21 \text{ centimes}.$$

On doit tenir au contraire pour démontrée la proposition que « $L + M\sqrt{-1} + N\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = 0$ *implique séparément* $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ », confirmée d'ailleurs (n° 10) par son analogue dans la théorie des quaternions : « A, B, C *étant trois vecteurs de direction différente et non compris dans un même plan, la relation* $a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C} = 0$ *implique séparément :* $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. »

On a fait ressortir (n° 39) une autre concordance des deux

théories. D'une part « *le produit d'acceptions de réflexité différente, correspondant à la résultante d'une composition d'arcs, varie avec l'ordre d'introduction des facteurs ou des arcs considérés.* » D'autre part « *la multiplication des vecteurs non coplanaires ou l'addition sphérique n'est pas commutative* ».

Ainsi, comme conception, et au point de vue *théorique*, les méthodes des *quaternions* et des *acceptions* n'ont rien qui s'exclue, au contraire.

Quant aux ressources *pratiques* que peut offrir l'emploi des méthodes des quaternions et des équipollences quand on se les est rendues familières, nous nous sommes abstenu (Préface, p. XX) de toute appréciation à cet égard, en nous bornant à faire ressortir le *caractère artificiel* de l'algèbre des équipollences et des quaternions.

SUR LES COURBES DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. MOUTARD.

PROBLÈME. — *Étant donnée une courbe du troisième degré* (C), *trouver deux faisceaux de trois droites concourantes, dont les neuf points communs soient situés sur* (C).

Toutes les solutions de ce problème, qui dépend de deux indéterminées, peuvent être obtenues de la manière suivante.

Soit H un point quelconque de la hessienne de (C), c'est-à-dire un point dont la polaire par rapport à C consiste en un système de deux droites; le point de concours H′ de ces deux droites appartiendra lui-même, comme on sait, à la hessienne, et la polaire de H′ consistera en deux droites concourant en H; en outre, l'axe harmonique de H par rapport à (C) sera la tangente à la hessienne en H′ et réciproquement. (Les tangentes

en H et H′ à la hessienne concourent d'ailleurs en un point de cette courbe.)

Cela posé, traçons un faisceau de trois droites concourant en H, assujetti à la condition que la polaire de H′ par rapport à ce faisceau se confonde avec la polaire de H′ par rapport à (C); ce faisceau dépendra encore d'une indéterminée, qui permettrait, par exemple, de choisir arbitrairement l'une des droites du faisceau. Les neuf points d'intersection de ce faisceau et de (C) seront situés sur un autre faisceau de trois droites concourant en H′. De cette construction on peut encore conclure l'énoncé suivant :

Étant données une courbe de troisième degré (C) et une droite (D), on peut, en général, de trois manières différentes associer à (D) deux autres droites concourant en un point de (D); de telle manière que les neuf points d'intersection de (C) avec (D) et ses deux associées soient situés sur un autre faisceau de trois droites concourantes.

Quelques cas particuliers paraissent intéressants, par exemple, celui où l'un des points H ou H′ est l'un des points d'inflexion de (C); ceux où la courbe (C) a un point double, et même celui où (C) se décompose en une conique et une droite. Je me bornerai à signaler une conséquence relative à ce dernier cas, qui offre une étroite analogie avec le problème de la construction d'un polygone simultanément inscrit à une conique et circonscrit à une autre, et qui est utile dans l'étude des cônes harmoniques.

Lorsqu'il est possible d'inscrire dans un cône du second degré un angle polyèdre hexagonal, tel que les trois faces 1, 3, 5 forment un faisceau ayant pour section droite une *rose des vents,* et que les faces 2, 4, 6 satis-

fassent à la même condition, le problème a une infinité de solutions.

SUR LES COURBES DONT LES TANGENTES APPARTIENNENT A UN COMPLEXE LINÉAIRE;

PAR M. P. APPELL.

Les tangentes de toute cubique gauche appartiennent à un complexe linéaire, comme il est bien connu; pour que les tangentes d'une biquadratique gauche unicursale appartiennent à un complexe linéaire, il faut et il suffit, comme il est également connu, que les expressions des coordonnées d'un point de cette courbe en fonction rationnelle du quatrième degré d'un paramètre λ puissent être amenées à ne pas contenir λ^2.

D'une manière générale, si l'on pose

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda + a_3}{\alpha_0\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda + \alpha_3}, \\ y &= \frac{b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda + b_3}{\alpha_0\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda + \alpha_3}, \\ z &= \frac{c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda + c_3}{\alpha_0\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda + \alpha_3}, \end{aligned} \right.$$

les lettres a_k, b_k, c_k, α_k désignant des constantes et n un nombre quelconque, la courbe décrite par x, y, z, quand λ varie, est telle que ses tangentes appartiennent à un complexe linéaire. Cette courbe donne les cubiques et les biquadratiques dont il est question plus haut, si l'on suppose $n = 3$ ou $n = 4$.

En résolvant les équations (1) par rapport à λ^n, λ^{n-1}, λ, on a

$$(2)\qquad \frac{X}{\lambda^n} = \frac{Y}{\lambda^{n-1}} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1},$$

X, Y, Z, T étant des expressions linéaires en x, y, z, que nous prendrons comme coordonnées tétraédriques d'un point. Les équations (2) donnent la relation

$$YZ - TX = 0,$$

qui montre que la courbe est sur une surface du second ordre. Quand n est entier, les génératrices de l'un des systèmes rencontrent la courbe en un point, celles de l'autre en $(n-1)$ points.

Pour que le plan

$$(3) \qquad AX + BY + CZ + DT = 0$$

soit osculateur à la courbe au point

$$\frac{X_0}{\lambda_0^n} = \frac{Y_0}{\lambda_0^{n-1}} = \frac{Z_0}{\lambda_0} = \frac{T_0}{1}$$

de paramètre λ_0, il faut et il suffit que l'équation

$$A\lambda^n + B\lambda^{n-1} - C\lambda + D = 0$$

admette la racine triple λ_0; ce qui s'exprime par les trois conditions

$$A\lambda_0^n + B\lambda_0^{n-1} + C\lambda_0 + D = 0,$$
$$nA\lambda_0^{n-1} + (n-1)B\lambda_0^{n-2} + C = 0,$$
$$nA\lambda_0^{n-2} + (n-2)B\lambda_0^{n-3} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{B}{A} = -\frac{n}{n-2}\lambda_0, \qquad \frac{C}{A} = \frac{n}{n-2}\lambda_0^{n-1}, \qquad \frac{D}{A} = -\lambda_0^n;$$

le plan osculateur a donc pour équation

$$X - \frac{n}{n-2}\lambda_0 Y + \frac{n}{n-2}\lambda_0^{n-1} Z - \lambda_0^n T = 0,$$

ou bien

$$XT_0 - TX_0 + \frac{n}{n-2}(ZY_0 - YZ_0) = 0.$$

Cette dernière équation est celle du plan focal d'un point (X_0, Y_0, Z_0, T_0) dans un complexe linéaire; ce qui démontre la propriété annoncée.

On vérifiera sans peine qu'aux deux points $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$ le plan osculateur et la tangente ont, en général, avec la courbe des contacts d'un ordre plus élevé qu'en un point ordinaire.

En faisant, dans les équations (1), tendre n vers zéro, après avoir posé

$$a_0 = \frac{a'_0}{n}, \qquad a_3 = a'_3 - \frac{a'_0}{n},$$

$$\alpha_0 = \frac{\alpha'_0}{n}, \qquad \alpha_3 = \alpha'_3 - \frac{\alpha'_0}{n},$$

$$\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on trouve la courbe

$$x = \frac{a'_0 \log\lambda + a_1\lambda^{-1} + a^2\lambda + a'_3}{\alpha'_0 \log\lambda + \alpha_1\lambda^{-1} + \alpha_2\lambda + \alpha'_3}, \qquad \ldots,$$

qui est la transformée homographique d'une hélice tracée sur un cylindre de révolution; en effet, les coordonnées x', y', z' d'un point de l'hélice sont données par

$$x' = \mathrm{R}\cos\theta, \qquad y' = \mathrm{R}\sin\theta, \qquad z' = k\theta,$$

d'où, en posant $e^{i\theta} = \lambda$,

$$x' + y'i = \mathrm{R}\lambda, \qquad x' - y'i = \mathrm{R}\lambda^{-1}, \qquad iz' = k\log\lambda.$$

On obtient, par un procédé analogue, une courbe limite pour $n = 2$ et $n = 1$.

Remarque. — Considérons la courbe qui, en coordonnées tétraédriques, a des équations de la forme

$$(4) \qquad \frac{X}{t^\alpha} = \frac{Y}{t^\beta} = \frac{Z}{t^\gamma} = \frac{T}{1},$$

t étant un paramètre variable, α, β, γ des constantes; pour que les tangentes de cette courbe appartiennent à un complexe linéaire, il faut et il suffit, comme on le vérifiera, que l'un des exposants α, β, γ soit égal à la somme des deux autres : par exemple

$$\alpha = \beta + \gamma.$$

En posant alors $t^\gamma = \lambda$, $\frac{\alpha}{\gamma} = n$, on a

$$\frac{X}{\lambda^n} = \frac{Y}{\lambda^{n-1}} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1};$$

c'est la courbe ci-dessus.

Pour exprimer que les tangentes à la courbe (4) appartiennent à un complexe de droites du premier ordre, il suffit d'exprimer que la transformée homographique de cette courbe

$$(5) \qquad x = t^\alpha, \qquad y = t^\beta, \qquad z = t^\gamma$$

possède la même propriété, c'est-à-dire que x, y, z vérifient l'équation

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &a\,dx + b\,dy + c\,dz + p(y\,dz - z\,dy) \\ &\qquad + q(z\,dx - x\,dz) + r(x\,dy - y\,dx) = 0, \end{aligned} \right.$$

où a, b, c, p, q, r sont des constantes convenablement déterminées, non nulles toutes à la fois. En substituant dans cette équation les expressions (5), on obtient une condition qui doit être une identité en t : il faut que dans cette identité deux termes en t au moins aient le même exposant, car, autrement, il ne pourrait se faire aucune réduction. En exprimant que deux de ces exposants sont égaux et écartant le cas où deux des nombres α, β, γ sont égaux, cas qui donne des *courbes planes*,

on trouvera que l'un des nombres α, β, γ doit être égal à la somme des deux autres.

DÉMONSTRATION SIMPLE DES FORMULES QUI SERVENT AU CALCUL DES TABLES DE LOGARITHMES SINUS;

PAR M. H. LAURENT.

La fonction

$$\sin x - x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

s'annule pour $x=0, \pm\pi, \ldots, \pm n\pi$, et il est naturel de poser

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sin x - x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\\ &\quad = Ax^2\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),\end{aligned}\right.$$

car le premier membre de cette équation, divisé par x, s'annule encore pour $x=0$. Si l'on considère alors la fonction

$$\begin{aligned}\sin z - z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)&\\ - Az^2\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)&,\end{aligned}$$

où A est donné par la formule (1), on voit que cette fonction s'annulera pour les $2n+1$ valeurs $0, \pm\pi, \ldots, \pm n\pi$ de z et, en outre, en vertu de (1) pour $z=x$, j'ajoute que $z=0$ est une racine double : donc la dérivée d'ordre $2n+2$ de la fonction considérée s'annulera pour une valeur comprise entre $-n\pi$ et $+n\pi$ si l'on

suppose x compris entre ces limites. Or cette dérivée est

$$\pm \sin z - \mathrm{A}\,\frac{1.2.3\ldots(2n+2)}{\pi^2\,2\pi^2\ldots n^2\pi^2},$$

et il en résulte que la valeur absolue de A est moindre que

$$\frac{(1.2.3\ldots n)^2\pi^{2n}}{1.2.3\ldots(2n+z)}$$

ou

$$\frac{\pi^2}{n+1}\,\frac{2\pi^2}{n+2}\cdots\frac{n\pi^2}{2n}\,\frac{1}{(2n+1)(2n+2)};$$

cette quantité a manifestement pour limite zéro pour $n=\infty$: on peut donc écrire

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)+\varepsilon,$$

ε ayant pour limite zéro quand $n=\infty$; on a donc

$$\log\sin x = \log x + \log\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)+\ldots+\log\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)+\ldots.$$

On démontrerait avec la même facilité la formule

$$\cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\ldots+\left(1-\frac{4x^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right)+\varepsilon,$$

où ε tend vers zéro avec n.

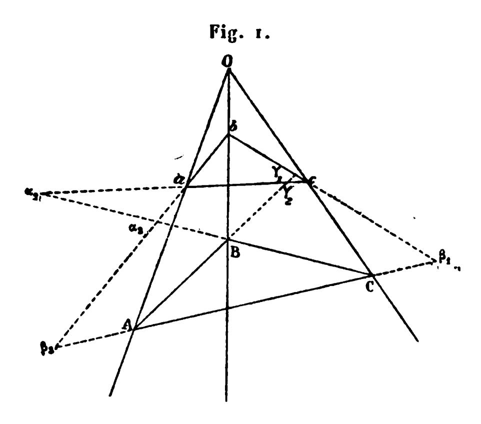
SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE;

PAR M. MOLENBROCH.

THÉORÈME. — *Si deux triangles abc*, ABC *sont homologiques et si l'on détermine les points d'intersection de chaque côté de l'un avec les deux côtés non homologues de l'autre, les six points ainsi obtenus sont situés sur une conique.*

Démonstration géométrique (voir *fig.* 1). — Soient α_2, α_3 les points d'intersection du côté BC avec *ca*, *ab*;

Fig. 1.



β_3, β_1 ceux de CA avec *ab*, *bc*; enfin γ_1, γ_2 ceux AB avec *bc*, *ca*.

Considérons l'hexagone $\alpha_2\alpha_3\beta_3\beta_1\gamma_1\gamma_2$; les points d'intersection des côtés

$$\alpha_2\alpha_3,\quad \beta_1\gamma_1;\quad \alpha_3\beta_3,\quad \gamma_1\gamma_2;\quad \beta_3\beta_1,\quad \gamma_1\gamma_2,$$

ou des droites

$$\text{BC},\ bc;\quad ab,\ \text{AB};\quad \text{AC},\ ac$$

sont, d'après un théorème bien connu, en ligne droite. On en conclut que l'hexagone est inscrit à une conique.

Démonstration analytique. — Soient

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0$$

les équations de BC, CA, AB en coordonnées trilinéaires. Le centre d'homologie est donné par y_1, y_2, y_3. Les coordonnées des points a, b, c seront proportionnelles à

$$z_1, y_2, y_3; \quad y_1, z_2, y_3; \quad y_1, y_2, z_3,$$

où z_1, z_2, z_3 sont des quantités arbitraires.

L'équation du côté bc sera

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & z_2 & y_3 \\ y_1 & y_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

et les coordonnées du point β_1 sont déterminées par cette équation, et $x_2 = 0$.

Il s'ensuit que l'équation

$$(2) \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & z_2 & y_3 \\ y_1 & y_2 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & z_3 \\ z_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & y_2 & y_3 \\ y_1 & z_2 & y_3 \end{vmatrix} + \lambda x_1 x_2 x_3 = 0,$$

dans laquelle λ est une quantité variable, représente des courbes de troisième degré passant par les neuf points d'intersection de chacune des droites BC, CA, AB avec bc, ca, ab.

L'équation de l'axe d'homologie des triangles abc, ABC passant par les points d'intersection de BC et bc, CA et ca, AB et ab, sera

$$(3) \qquad \frac{x_1}{y_1 - z_1} + \frac{x_2}{y_2 - z_2} + \frac{x_3}{y_3 - z_3} = 0.$$

Posons maintenant

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{z_2 z_3 - y_2 y_3}{y_1(y_2 - z_2)(y_3 - z_3)} = a_1,\\ &\frac{z_3 z_1 - y_3 y_1}{y_2(y_3 - z_3)(y_1 - z_1)} = a_2,\\ &\frac{z_1 z_2 - y_1 y_2}{y_3(y_1 - z_1)(y_2 - z_2)} = a_3,\\ &\frac{1}{y_1 - z_1} = b_1,\\ &\frac{1}{y_2 - z_2} = b_2,\\ &\frac{1}{y_3 - z_3} = b_3. \end{aligned}\right.$$

Les équations (2), (3) se réduisent aux deux suivantes

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &(a_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)(b_1 x_1 + a_2 x_2 + b_3 x_3)\\ &\qquad \times (b_1 x_1 + b_2 x_2 + a_3 x_3) + \lambda' x_1 x_2 x_3 = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0,$$

λ' étant une variable différente de λ.

Une nouvelle réduction s'obtient en introduisant la notation

$$(7)\quad L \equiv b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3,$$

$$(8)\quad a_1 - b_1 = c_1, \qquad a_2 - b_2 = c_2, \qquad a_3 - b_3 = c_3.$$

En effet, l'équation de l'axe d'homologie devient

$$L = 0,$$

et, au lieu de (5), on pourra mettre

$$(L + c_1 x_1)(L + c_2 x_2)(L + c_3 x_3) + \lambda' x_1 x_2 x_3 = 0.$$

En attribuant à λ' la valeur $-c_1 c_2 c_3$, cette équation prend la forme

$$\begin{aligned} L[L^2 + L(c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)&\\ + c_2 c_3 x_2 x_3 + c_3 c_1 x_3 x_1 + c_1 c_2 x_1 x_2] &= 0; \end{aligned}$$

elle exprime que la courbe du troisième degré passant par les neuf points d'intersection de chacune des droites BC, CA, AB avec *bc*, *ca*, *ab* se compose de l'axe d'homologie et d'une conique. Les côtés homologues se coupant sur l'axe d'homologie, il s'ensuit que la conique passe par les six autres points d'intersection. L'équation de cette conique

$$(9)\quad \begin{cases} L^2 + L(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3) \\ \quad + c_2c_3x_2x_3 + c_3c_1x_3x_1 + c_1c_2x_1x_2 = 0 \end{cases}$$

se simplifie considérablement en posant

$$(10)\quad \frac{y_2y_3z_1 + y_3y_1z_2 + y_1y_2z_3 - 2y_1y_2y_3 - z_1z_2z_3}{(y_1 - z_1)(y_2 - z_2)(y_3 - z_3)} = n,$$

d'où il suit

$$(11)\quad c_1 = \frac{n}{y_1}, \qquad c_2 = \frac{n}{y_2}, \qquad c_3 = \frac{n}{y_3},$$

par conséquent

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = n\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3}\right),$$

$$c_2c_3x_2x_3 + c_3c_1x_3x_1 + c_1c_2x_1x_2 = n^2\left(\frac{x_2x_3}{y_2y_3} + \frac{x_3x_1}{y_3y_1} + \frac{x_1x_2}{y_1y_2}\right).$$

La droite

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0$$

et la conique

$$c_2c_3x_2x_3 + c_3c_1x_3x_1 + c_1c_2x_1x_2 = 0$$

sont, comme on voit, des polaires du point O par rapport au triangle ABC. Si l'on pose

$$(12)\quad \begin{cases} R \equiv \dfrac{x_1}{y_1} + \dfrac{x_2}{y_2} + \dfrac{x_3}{y_3}, \\ K \equiv \dfrac{x_2x_3}{y_2y_3} + \dfrac{x_3x_1}{y_3y_1} + \dfrac{x_1x_2}{y_1y_2}, \\ L \equiv nC, \end{cases}$$

la conique passant par les points d'intersection des côtés non homologues sera représentée par l'équation

$$(13) \qquad C^2 + CR + K = 0.$$

Dans cette équation, on a identiquement

$$(14) \qquad C \equiv d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3,$$

où

$$(15) \quad d_1 = \frac{b_1}{n} = \frac{(y_2 - z_2)(y_3 - z_3)}{y_2 y_3 z_1 + y_3 y_1 z_2 + y_1 y_2 z_3 - 2 y_1 y_2 y_3 - z_1 z_2 z_3}, \quad \cdots$$

Voici encore l'énoncé du théorème corrélatif :

Si deux triangles abc, ABC *sont homologues et si l'on joint chacun des sommets de l'un aux deux sommets non homologues de l'autre, les six droites ainsi obtenues sont tangentes à une seule conique.*

Nous voulons ensuite transformer les résultats obtenus jusqu'ici en introduisant les directions des côtés *bc*, *ca*, *ab*. Soient par A, B, C tracées trois directions

$$(16) \quad x_2 + \lambda x_3 = 0, \qquad x_3 + \mu x_1 = 0, \qquad x_1 + \nu x_2 = 0,$$

parallèles à *bc*, *ca*, *ab*, que nous appellerons, dans ce qui suit, simplement les *directions* λ, μ, ν.

Les quantités λ, μ, ν ne seront pas indépendantes des coordonnées du centre d'homologie. Il existe entre ces quantités une relation que nous nous proposons de chercher.

Pour cela, il faut définir plus exactement les coordonnées trilinéaires, dont nous nous sommes servi jusqu'ici. Prenons comme coordonnées trilinéaires d'un point les longueurs des trois perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés du triangle ABC, de sorte qu'on ait

généralement

$$(17)\qquad a_1x_1 + b_2x_2 + c_3x_3 = 2 \times \text{aire du triangle ABC} = 2\Delta,$$

a, b, c étant les côtés du triangle.

L'équation de la droite à l'infini est alors

$$(18)\qquad ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0,$$

et, afin que la droite bc soit parallèle à la direction λ, il faut qu'on ait

$$(19)\qquad \begin{cases} \lambda(a_1b - b_2a) - (a_1c - b_3a) = 0. \\ \text{De même, on trouve} \\ \mu(a_2c - b_3b) - (a_2a - b_1b) = 0, \\ \nu(a_3a - b_1c) - (a_3b - b_2c) = 0. \end{cases}$$

A l'aide de la formule (15) on obtient

$$d_1 + \frac{1}{y_1} = \frac{(z_2z_3 - y_2y_3)(y_1 - z_1)}{y_1(y_2y_3z_1 + y_3y_1z_2 + y_1y_2z_3 - 2y_1y_2y_3 - z_1z_2z_3)} = \frac{a_1}{n},$$

ou

$$a_1 = n\left(d_1 + \frac{1}{y_1}\right), \qquad \dots$$

Aussi l'on a, d'après (15),

$$b_1 = n\,d_1, \qquad b_2 = n\,d_2, \qquad b_3 = n\,d_3,$$

de sorte que les équations (19) se réduisent aux suivantes

$$(20)\qquad \begin{cases} \lambda\left(b\,d_1 - a\,d_2 + \dfrac{b}{y_1}\right) + \left(a\,d_3 - c\,d_1 - \dfrac{c}{y_1}\right) = 0, \\ \mu\left(c\,d_2 - b\,d_3 + \dfrac{c}{y_2}\right) + \left(b\,d_1 - a\,d_2 - \dfrac{a}{y_2}\right) = 0, \\ \nu\left(a\,d_3 - c\,d_1 + \dfrac{a}{y_3}\right) + \left(c\,d_2 - b\,d_3 - \dfrac{b}{y_3}\right) = 0, \end{cases}$$

d'où il faudra déterminer z_1, z_2, z_3 en fonction de λ, μ, ν, y_1, y_2, y_3.

En résolvant ces trois équations par rapport aux quantités

$$c\,d_2 - b\,d_3, \quad a\,d_3 - c\,d_1, \quad b\,d_1 - a\,d_2,$$

on obtient

$$(21)\quad \begin{cases} (1+\lambda\mu\nu)(c\,d_2 - b\,d_3) \\ \quad = \dfrac{b}{y_3} - \nu\left(\dfrac{a}{y_3}+\dfrac{c}{y_1}\right) + \nu\lambda\left(\dfrac{b}{y_1}+\dfrac{a}{y_2}\right) - \lambda\mu\nu\dfrac{c}{y_2}, \\ (1+\lambda\mu\nu)(a\,d_3 - c\,d_1) \\ \quad = \dfrac{c}{y_1} - \lambda\left(\dfrac{b}{y_1}+\dfrac{a}{y_2}\right) + \lambda\mu\left(\dfrac{c}{y_2}+\dfrac{b}{y_3}\right) - \lambda\mu\nu\dfrac{a}{y_3}, \\ (1+\lambda\mu\nu)(b\,d_1 - a\,d_2) \\ \quad = \dfrac{a}{y_2} - \mu\left(\dfrac{c}{y_2}+\dfrac{b}{y_3}\right) + \mu\nu\left(\dfrac{a}{y_3}+\dfrac{c}{y_1}\right) - \lambda\mu\nu\dfrac{b}{y_1}, \end{cases}$$

formules exigeant que $1+\lambda\mu\nu$ ne s'annule pas. C'est ce cas que nous voulons exclure d'abord.

De la multiplication des équations (21) par a, b, c et de l'addition de ces produits, il résulte

$$(22)\quad \begin{cases} (1-\lambda\mu\nu)\left(\dfrac{1}{ay_1}+\dfrac{1}{by_2}+\dfrac{1}{cy_3}\right) \\ \quad + \dfrac{b\lambda - c}{a}\,\mu\left(\dfrac{1}{by_2}+\dfrac{1}{cy_3}\right) \\ \quad + \dfrac{c\mu - a}{b}\,\nu\left(\dfrac{1}{cy_3}+\dfrac{1}{ay_1}\right) \\ \quad + \dfrac{a\nu - b}{c}\,\lambda\left(\dfrac{1}{ay_1}+\dfrac{1}{by_2}\right) = 0. \end{cases}$$

C'est la relation qui doit exister entre λ, μ, ν, y_1, y_2, y_3, afin qu'il soit possible de tracer des triangles *abc* homologiques à ABC, tandis que y_1, y_2, y_3 est le centre d'homologie et que les côtés *bc*, *ca*, *ab* sont parallèles à λ, μ, ν.

Si cette équation est satisfaite, les quantités d_1, d_2, d_3 ne sont pas complètement déterminées par les équations (20); de même pour z_1, z_2, z_3. On peut déduire de ces équations des valeurs de d_1, d_2, d_3 renfermant une variable arbitraire.

Nous n'écrirons pas ici ces valeurs ; plus tard nous en trouverons de plus simples [*voir* les formules (42)]. Toutefois, il suit de là que les valeurs de z_1, z_2, z_3 renfermeront aussi une quantité variable.

L'interprétation géométrique de ce résultat est fort simple : si les directions λ, μ, ν et le point O sont tels, qu'un triangle *abc* homologique à ABC puisse être trouvé, ayant ses côtés parallèles à λ, μ, ν, O étant le centre d'homologie, il y aura une infinité de triangles jouissant de la même propriété par rapport au même centre d'homologie.

Si l'équation

$$(23) \qquad 1 + \lambda\mu\nu = 0$$

est satisfaite, les relations (20) ne pourront pas exister à la fois, à moins qu'un des seconds membres des équations (21) s'annule. La supposition (23) entraîne donc la suivante

$$(24) \quad \frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_3} - \nu\left(\frac{a}{y_3} + \frac{c}{y_1}\right) + \nu\lambda\left(\frac{b}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right) = 0.$$

Examinons maintenant à quelle condition la conique (13) sera un cercle. Si l'on pose identiquement

$$f \equiv G^2 + CR + K,$$

et si u_1, u_2, u_3 sont des valeurs satisfaisant à l'équation (18), les coordonnées v_1, v_2, v_3, qui satisfont à (18) et à la relation

$$(25) \qquad v_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + v_3 \frac{\partial f}{\partial u_3} = 0,$$

à la fois, désigneront une direction conjuguée à la direction du point u_1, u_2, u_3 par rapport à la conique $f = 0$.

Si u_1, u_2, u_3 et v_1, v_2, v_3 sont en rapport harmonique avec les points imaginaires cycliques à l'infini, ces direc-

tions seront perpendiculaires l'une à l'autre. Cherchons la condition qui doit être satisfaite, afin que ce cas ait lieu. Les coordonnées des points imaginaires cycliques à l'infini sont

$$e^{\pm i\alpha_1},\quad e^{\pm i\alpha_2},\quad e^{\pm i\alpha_3},$$

α_1, α_2, α_3 représentant les angles sous lesquels les perpendiculaires abaissées de l'origine sur les côtés du triangle ABC rencontrent l'axe des X. Si l'origine est choisie à l'intérieur du triangle, on aura

$$\alpha_3 - \alpha_2 = \pi - \mathrm{A},\qquad \alpha_1 - \alpha_3 = \pi - \mathrm{B},\qquad \alpha_2 - \alpha_1 = \pi - \mathrm{C}.$$

Posons maintenant

$$(26)\qquad \begin{cases} u_1 = e^{i\alpha_1} + ke^{-i\alpha_1}, \\ u_2 = e^{i\alpha_2} + ke^{-i\alpha_2}, \\ u_3 = e^{i\alpha_3} + ke^{-i\alpha_3}. \end{cases}$$

De ce qui précède, il suit qu'on aura également

$$(27)\qquad \begin{cases} v_1 = e^{i\alpha_1} - ke^{-i\alpha_1}, \\ v_2 = e^{i\alpha_2} - ke^{-i\alpha_2}, \\ v_3 = e^{i\alpha_3} - ke^{-i\alpha_3}, \end{cases}$$

valeurs qui doivent satisfaire encore à la relation (25).

Or, comme

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \mathrm{C}d_1 + (\mathrm{C}+\mathrm{R})\left(d_1 + \frac{1}{y_1}\right) - \frac{u_1}{y_1^2},$$

où, dans C et R, x_1, x_2, x_3 doivent être remplacées par u_1, u_2, u_3, si par $\mathrm{C}_{\alpha i}$, $\mathrm{C}_{-\alpha i}$ nous désignons les valeurs que C prend, lorsqu'on y remplace x_1, x_2, x_3 par $e^{\alpha_1 i}$, $e^{\alpha_2 i}$, $e^{\alpha_3 i}$; $e^{-\alpha_1 i}$, $e^{-\alpha_2 i}$, $e^{-\alpha_3 i}$, il en résulte

$$\begin{aligned} v_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + v_3 \frac{\partial f}{\partial u_3} &= \mathrm{C}_{\alpha i}^2 + (\mathrm{C}_{\alpha i} + \mathrm{R}_{\alpha i})^2 - \left(\frac{e^{2\alpha_1 i}}{y_1^2} + \frac{e^{2\alpha_2 i}}{y_2^2} + \frac{e^{2\alpha_3 i}}{y_3^2}\right) \\ &\quad - k^2\left[\mathrm{C}_{-\alpha i}^2 + (\mathrm{C}_{-\alpha i} + \mathrm{R}_{-\alpha i})^2 - \left(\frac{e^{-2\alpha_1 i}}{y_1^2} + \frac{e^{-2\alpha_2 i}}{y_2^2} + \frac{e^{-2\alpha_3 i}}{y_3^2}\right)\right], \end{aligned}$$

et les deux membres de cette équation devront s'annuler.

S'ils s'annulent pour toute valeur attribuée à k, la conique (13) sera un cercle. Les conditions nécessaires et suffisantes, afin que les côtés du triangle *abc* coupent les côtés non homologues de ABC en six points concycliques, sont par conséquent

$$C_{\alpha i}^2 + (C_{\alpha i} + R_{\alpha i})^2 - \left(\frac{e^{2\alpha_1 i}}{y_1^2} + \frac{e^{2\alpha_2 i}}{y_2^2} + \frac{e^{2\alpha_3 i}}{y_3^2}\right) = 0,$$

$$C_{-\alpha i}^2 + (C_{-\alpha i} + R_{-\alpha i})^2 - \left(\frac{e^{-2\alpha_1 i}}{y_1^2} + \frac{e^{-2\alpha_2 i}}{y_2^2} + \frac{e^{-2\alpha_3 i}}{y_3^2}\right) = 0.$$

L'addition et la soustraction de ces équations fournit

$$\begin{aligned} d_1\left(d_1 + \frac{1}{y_1}\right)\cos 2\alpha_1 + d_2\left(d_2 + \frac{1}{y_2}\right)\cos 2\alpha_2 \\ + d_3\left(d_3 + \frac{1}{y_3}\right)\cos\alpha_3 \\ + \left[d_2 d_3 + \left(d_2 + \frac{1}{y_2}\right)\left(d_3 + \frac{1}{y_3}\right)\right]\cos(\alpha_2 + \alpha_3) \\ + \left[d_3 d_1 + \left(d_3 + \frac{1}{y_3}\right)\left(d_1 + \frac{1}{y_1}\right)\right]\cos(\alpha_3 + \alpha_1) \\ + \left[d_1 d_2 + \left(d_1 + \frac{1}{y_1}\right)\left(d_2 + \frac{1}{y_2}\right)\right]\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = 0, \end{aligned}$$

et une seconde équation qui peut s'obtenir de la dernière en changeant seulement les cosinus en sinus.

Multiplions la première de ces équations par $\sin 2\alpha_1$, la seconde par $\cos 2\alpha_1$, ou bien la première par $\sin 2\alpha_2$, la seconde par $\cos 2\alpha_3$, ... et retranchons chaque fois le second produit du premier. On aura

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} d_2\left(d_2 + \frac{1}{y_2}\right)\sin 2C - d_3\left(d_3 + \frac{1}{y_3}\right)\sin 2B \\ + \left[d_2 d_3 + \left(d_2 + \frac{1}{y_2}\right)\left(d_3 + \frac{1}{y_3}\right)\right]\sin(C - B) \\ + \left[d_3 d_1 + \left(d_3 + \frac{1}{y_3}\right)\left(d_1 + \frac{1}{y_2}\right)\right]\sin B \\ - \left[d_1 d_2 + \left(d_1 + \frac{1}{y_1}\right)\left(d_2 + \frac{1}{y_1}\right)\right]\sin C = 0. \end{aligned}\right.$$

et deux autres équations provenant de la précédente par une permutation cyclique de d_1, d_2, d_3; A, B, C. Ces trois relations ne sont cependant pas indépendantes l'une des autres; en effet, la multiplication par sin 2A, sin 2B, sin 2C et l'addition de ces produits fournit une identité.

Enfin, multiplions les équations (28) par bc, ca, ab, et remarquons qu'on a

$$\begin{aligned} abc \sin 2\mathrm{C} &= 2abc \sin \mathrm{C} \cos \mathrm{C} \\ &= 2ac^2 \sin \mathrm{B} \cos \mathrm{C} = ac^2[\sin \mathrm{A} + \sin(\mathrm{B} - \mathrm{C})], \\ abc \sin 2\mathrm{B} &= ab^2[\sin \mathrm{A} - \sin(\mathrm{B} - \mathrm{C})]. \end{aligned}$$

On pourra mettre le résultat sous la forme

$$\begin{aligned} \sin \mathrm{A} \Big[c^2 &\left(bd_1 - ad_2 + \frac{b}{y_1}\right)\left(bd_1 - ad_2 - \frac{a}{y_2}\right) \\ &- b^2 \left(ad_3 - cd_1 + \frac{a}{y_3}\right)\left(ad_3 - cd_1 - \frac{c}{y_1}\right)\Big] \\ &+ \sin(\mathrm{B} - \mathrm{C})\, a^2 \left(cd_2 - bd_3 + \frac{c}{y_2}\right)\left(cd_2 - bd_3 - \frac{b}{y_3}\right) = 0. \end{aligned}$$

Des trois équations ainsi obtenues, homogènes par rapport aux quantités

$$\begin{gathered} a^2 \left(cd_2 - bd_3 + \frac{c}{y_2}\right)\left(cd_2 - bd_3 - \frac{b}{y_3}\right), \\ b^2 \left(ad_3 - cd_1 + \frac{a}{y_3}\right)\left(ad_3 - cd_1 - \frac{c}{y_1}\right), \\ c^2 \left(bd_1 - ad_2 + \frac{b}{y_1}\right)\left(bd_1 - ad_2 - \frac{a}{y_2}\right), \end{gathered}$$

celles-ci peuvent être tirées à un facteur près, d'où il résulte

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(cd_2 - bd_3 + \frac{c}{y_2}\right)\left(cd_2 - bd_3 - \frac{b}{y_3}\right) \\ &= \left(ad_3 - cd_1 + \frac{a}{y_3}\right)\left(ad_3 - cd_1 - \frac{c}{y_1}\right) \\ &= \left(bd_1 - ad_2 + \frac{b}{y_1}\right)\left(bd_1 - ad_2 - \frac{a}{y_2}\right), \end{aligned} \right.$$

Ce sont les conditions, qui doivent être satisfaites, afin que la conique (13) soit un cercle.

L'introduction des quantités λ, μ, ν dans ces équations au lieu de d_1, d_2, d_3 peut s'effectuer de deux manières assez différentes, dont chacune présente un intérêt particulier.

La première ou la plus directe consiste seulement à porter les valeurs de

$$cd_2 - bd_3, \quad ad_3 - cd_1, \quad bd_1 - ad_2$$

données par (21) en (29), d'où il résulte après quelques réductions

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\lambda}\left[\frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_3} - \nu\left(\frac{a}{y_3} + \frac{c}{y_1}\right) + \nu\lambda\left(\frac{b}{y_1} + \frac{a}{y^2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\mu}\left[\frac{a}{y_3} + \frac{c}{y_1} - \lambda\left(\frac{b}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right) + \lambda\mu\left(\frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_3}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\nu}\left[\frac{b}{y_1} + \frac{a}{y_2} - \mu\left(\frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_3}\right) + \mu\nu\left(\frac{a}{y_3} + \frac{c}{y_1}\right)\right]. \end{aligned} \right.$$

Les quantités λ, μ, ν, y_1, y_2, y_3 devront ainsi satisfaire aux trois équations (22) et (30), qu'on peut cependant encore considérablement simplifier. Pour abréger, posons

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{by_2} + \frac{1}{cy_3} &= ap_1, \\ \frac{1}{cy_3} + \frac{1}{ay_1} &= bp_2, \\ \frac{1}{ay_1} + \frac{1}{by_2} &= cp_3, \end{aligned} \right.$$

et considérons $p_1 : p_2 : p_3$ comme coordonnées d'un point P. Entre le centre d'homologie O et ce point P, il existera un rapport simple que nous exposerons d'abord. On déduit de l'équation (31)

$$\frac{1}{ay_1} : \frac{1}{by_2} : \frac{1}{cy_3} = (-ap_1 + bp_2 + cp_3)$$
$$: (ap_1 - bp_2 + cp_3) : (ap_1 + bp_2 - cp_3).$$

Si O′ ou z_1, z_2, z_3 est le point conjugué isotomique de O par rapport au triangle ABC, on aura

$$y_1 : y_2 : y_3 = \frac{1}{a^2 z_1} : \frac{1}{b^2 z_2} : \frac{1}{c^2 z_3};$$

par conséquent,

$$(32)\quad \left\{ \begin{array}{l} z_1 : z_2 : z_3 = \dfrac{-ap_1 + bp_2 + cp_3}{a} \\ \qquad : \dfrac{ap_1 - bp_2 + cp_3}{b} : \dfrac{ap_1 + bp_2 - cp_3}{c}. \end{array} \right.$$

Soit P′ le point conjugué isotomique de P et soient P'_1, P'_2, P'_3 les points d'intersection de AP′, BP′, CP′ avec les côtés opposés du triangle ABC. Si l'on trace enfin les droites B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 passant par A, B, C parallèles à BC, CA, AB, le point O′ sera le point d'intersection des droites $A_0P'_1$, $B_0P'_2$, $C_0P'_3$. En effet, les équations de $A_0P'_1$, $B_0P'_2$ sont

$$ax_1(bp_2 - cp_3) + b^2p_2x_2 - c^2p_3x_3 = 0,$$
$$-a^2p_1x_1 - bx_2(cp_3 - ap_1) + c^2p_3x_3 = 0,$$

d'où l'on tire des valeurs de x_1, x_2, x_3 égales à celles de z_1, z_2, z_3 dans l'équation (32).

A l'aide de la substitution (31) les relations (22) et (30) se réduisent aux suivantes

$$(33)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(1 - \lambda\mu\nu)(ap_1 + bp_2 + cp_3) \\ \qquad - p_1\mu(c - b\lambda) - p_2\nu(a - c\mu) - p_3\lambda(b - a\nu) = 0, \end{array} \right.$$

$$(34)\quad \frac{p_1 - \nu p_2 + \nu\lambda p_3}{\lambda} = \frac{p_2 - \lambda p_3 + \mu\nu p_1}{\mu} = \frac{p_3 - \mu p_1 + \mu\nu p_2}{\nu}.$$

En désignant chacune de ces fractions par H, de sorte qu'on ait

$$p_1 - \nu\, p_2 + \nu\lambda\, p_3 = \lambda\, \mathrm{H},$$
$$p_2 - \lambda\, p_3 + \lambda\mu\, p_1 = \mu\, \mathrm{H},$$
$$p_3 - \mu\, p_1 + \mu\nu\, p_2 = \nu\, \mathrm{H},$$

il devient facile d'exprimer p_1, p_2, p_3 en λ, μ, ν. A cet

effet, multiplions la seconde équation par ν et ajoutons à ce produit la première équation. Si l'on pose encore, afin d'abréger,

$$\frac{\text{H}}{1+\lambda\mu\nu}=\rho,$$

on trouvera

$$(35)\qquad p_1=\rho(\lambda+\mu\nu),\qquad p_2=\rho(\mu+\nu\lambda),\qquad p_3=\rho(\nu+\lambda\mu)$$

et enfin, en substituant ces valeurs dans l'équation (33),

$$(36)\qquad a(\lambda-\mu\nu)+b(\mu-\nu\lambda)+c(\nu-\lambda\mu)=0.$$

C'est donc la condition à laquelle λ, μ, ν doivent satisfaire, afin qu'il soit possible de construire des triangles *abc* homologiques à ABC, dont les côtés sont parallèles à λ, μ, ν, tandis que les six points d'intersection des côtés non homologues des deux triangles sont concycliques.

Passons maintenant à la seconde manière de déduire ces résultats des équations (20), (29).

De la première des équations (20) et de la suivante

$$\left(ad_3-cd_1+\frac{a}{y_3}\right)\left(d_3-cad_1-\frac{c}{y_1}\right)$$
$$=\left(bd_1-ad_2+\frac{b}{y_1}\right)\left(bd_1-ad_2-\frac{a}{y_2}\right),$$

appartenant au système d'équations (29), on conclut

$$bd_1-ad_2+\frac{b}{y_1}=0$$

ou

$$(37)\qquad ad_3-cd_1+\frac{a}{y_3}=-\frac{1}{\lambda}\left(bd_1-ad_2-\frac{a}{y_2}\right).$$

En supposant que la première des équations ait lieu et que λ ait une valeur quelconque, on déduit des systèmes (20), (29),

$$ad_3-cd_1-\frac{c}{y_1}=0$$

et

$$cd_2 - bd_3 + \frac{c}{y_2} = 0$$

ou

$$cd_2 - bd_3 - \frac{b}{y_3} = 0.$$

L'une et l'autre de ces dernières suppositions rend impossible de trouver des valeurs finies pour y_1, y_2, y_3. Il faudra donc conclure que l'équation (37) doit être satisfaite.

De cette équation et de la première des équations (20) on pourra maintenant tirer les valeurs de $ad_3 - cd_1$, $bd_1 - ad_2$

$$bd_1 - ad_2 = \frac{1}{\lambda^2 - 1}\left[\lambda\left(\frac{c}{y_1} + \frac{a}{y_3}\right) - \frac{a}{y_2} - \lambda^2 \frac{b}{y_3}\right],$$

$$ad_3 - cd_1 = \frac{1}{\lambda^2 - 1}\left[\lambda\left(\frac{a}{y_2} + \frac{b}{y_1}\right) - \frac{c}{y_1} - \lambda^2 \frac{a}{y_3}\right].$$

De même on pourra déterminer $cd_2 - bd_3$, $bd_1 - ad_2$ de la seconde des équations (20) et de la relation

$$\left(cd_2 - bd_3 + \frac{c}{y_2}\right)\left(cd_2 - bd_3 - \frac{b}{y_3}\right)$$
$$= \left(bd_1 - ad_2 + \frac{b}{y_1}\right)\left(bd_1 - ad_2 - \frac{a}{y_2}\right)$$

appartenant au système d'équations (29). On trouvera

$$bd_1 - ad_2 = \frac{1}{\mu^2 - 1}\left[\mu\left(\frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_3}\right) - \frac{a}{y_2} - \mu^2 \frac{b}{y_1}\right].$$

De cette manière on obtiendra pour chacune des quantités

$$cd_2 - bd_3, \quad ad_3 - cd_1, \quad bd_1 - ad_2,$$

deux valeurs qui sont

$$(38)\quad \begin{cases} cd_2 - bd_3 = \dfrac{1}{\mu^2 - 1}\left[\mu\left(\dfrac{a}{y_2} + \dfrac{b}{y_1}\right) - \dfrac{b}{y_3} - \mu^2 \dfrac{c}{y_2}\right] \\ \qquad = \dfrac{1}{\nu^2 - 1}\left[\nu\left(\dfrac{a}{y_3} + \dfrac{c}{y_1}\right) - \dfrac{b}{y_3} - \nu^2 \dfrac{c}{y_2}\right], \\ ad_3 - cd_1 = \dfrac{1}{\nu^2 - 1}\left[\nu\left(\dfrac{b}{y_3} + \dfrac{c}{y_2}\right) - \dfrac{c}{y_1} - \nu^2 \dfrac{a}{y_3}\right] \\ \qquad = \dfrac{1}{\lambda^2 - 1}\left[\lambda\left(\dfrac{b}{y_1} + \dfrac{a}{y_2}\right) - \dfrac{c}{y_1} - \lambda^2 \dfrac{a}{y_3}\right], \\ bd_1 - ad_2 = \dfrac{1}{\lambda^2 - 1}\left[\lambda\left(\dfrac{c}{y_1} + \dfrac{a}{y_3}\right) - \dfrac{a}{y_2} - \lambda^2 \dfrac{b}{y_1}\right] \\ \qquad = \dfrac{1}{\mu^2 - 1}\left[\mu\left(\dfrac{c}{y_2} + \dfrac{b}{y_2}\right) - \dfrac{a}{y_3} - \mu^2 \dfrac{b}{y_1}\right], \end{cases}$$

et qui permettent d'en déduire encore une troisième. A cet effet, prenons des équations (38) les deux suivantes

$$ad_3 - cd_1 = \frac{1}{\lambda^2 - 1}\left[\lambda\left(\frac{b}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right) - \frac{c}{y_1} - \lambda^2 \frac{a}{y_3}\right],$$
$$bd_1 - ad_2 = \frac{1}{\lambda^2 - 1}\left[\lambda\left(\frac{c}{y_1} + \frac{a}{y_3}\right) - \frac{a}{y_2} - \lambda^2 \frac{b}{y_1}\right];$$

multiplions la première par b, la seconde par c et ajoutons les produits. En ayant égard aux équations (31), on obtiendra

$$(39)\quad \begin{cases} cd_2 - bd_3 = \dfrac{bc}{\lambda^2 - 1}(c - b\lambda)(p_3 - \lambda p_2), \\ ad_3 - cd_1 = \dfrac{ca}{\mu^2 - 1}(a - c\mu)(p_1 - \mu p_3), \\ bd_1 - ad_2 = \dfrac{ab}{\nu^2 - 1}(b - a\nu)(p_2 - \nu p_1). \end{cases}$$

Des équations (38) on conclut encore, après quelques réductions

$$(40)\quad \begin{cases} \mu(p_3 - \mu p_1 + \mu\nu p_2) = \nu(p_2 - \nu p_1 + \mu\nu p_3), \\ \nu(p_1 - \nu p_2 + \nu\lambda p_3) = \lambda(p_3 - \lambda p_2 + \nu\lambda p_1), \\ \lambda(p_2 - \lambda p_3 + \lambda\mu p_1) = \mu(p_1 - \mu p_3 + \lambda\mu p_2), \end{cases}$$

relations qui ne sont pas indépendantes l'une des autres, parce qu'en éliminant p_1, p_2, p_3 on arrive à une identité. De deux quelconques de ces équations, on peut tirer les rapports $p_1 : p_2 : p_3$; on arrive de cette manière à

$$p_1 : p_2 : p_3 = (\lambda + \mu\nu) : (\mu + \nu\lambda) : (\nu + \lambda\mu),$$

c'est-à-dire aux équations (35). A l'aide de ces relations on peut ensuite trouver

$$p_3 - \lambda p_2 = \nu(1 - \lambda^2)v, \qquad \ldots,$$

résultat qui nous permet de mettre les équations (39) sous la forme

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} cd_2 - bd_3 &= vbc\nu(b\lambda - c), \\ ad_3 - cd_1 &= vca\lambda(c\mu - a), \\ bd_1 - ad_2 &= vab\mu(a\nu - b), \end{aligned} \right.$$

d'où l'on déduit, d'après une méthode souvent déjà employée, la relation (36) entre λ, μ, ν.

Des formules (41), on peut encore tirer des valeurs de d_1, d_2, d_3 renfermant une quantité indéterminée u, savoir

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} d_1 &= ua + \frac{av}{3}[\lambda(a - c\mu) - \mu(b - a\nu)], \\ d_2 &= ub + \frac{bv}{3}[\mu(b - a\nu) - \nu(c - b\lambda)], \\ d_3 &= uc + \frac{cv}{3}[\nu(c - b\lambda) - \lambda(a - c\mu)]. \end{aligned} \right.$$

L'équation (36) a une signification géométrique assez simple. En effet, soit A' le point d'intersection de la direction λ avec le côté BC, et soient l_b^a, l_c^a les perpendiculaires abaissées du point A' sur AC, AB. On aura

$$\lambda = -\frac{l_b^a}{l_c^a}.$$

D'après l'équation

$$bl^a_b + cl^a_c = 2\Delta,$$

on trouve

$$l^a_b = -\frac{2\lambda\Delta}{c-b\lambda}, \qquad l^a_c = \frac{2\Delta}{c-b\lambda}.$$

De la même manière, on peut exprimer l^b_c, l^b_a, l^c_a, l^c_b en fonction de μ, ν, d'où l'on déduit facilement

$$l^b_a l^c_a + l^c_b l^a_b + l^a_c l^b_c$$
$$= \frac{4\Delta^2}{(b\lambda-c)(c\mu-a)(a\nu-b)}[a(\lambda-\mu\nu)+b(\mu-\nu\lambda)+c(\nu-\lambda\mu)].$$

L'équation (36) exprime, comme on voit, que la fonction

$$l^b_a l^c_a + l^c_b l^a_b + l^a_c l^b_c$$

s'annule. La condition à laquelle les directions λ, μ, ν doivent satisfaire est donc que la somme des produits des deux perpendiculaires abaissées sur chacun des côtés du triangle ABC des deux points d'intersection de ces directions avec les deux autres côtés s'annule. Il est à remarquer qu'il faut regarder le produit de deux perpendiculaires comme négatif, si elles tombent sur le même côté, en sens contraire. Il s'ensuit que les points A′, B′, C′ ne peuvent jamais être situés sur les côtés eux-mêmes tous à la fois, ni sur les prolongements de ces côtés tracés dans un même sens en parcourant la périphérie du triangle d'une manière convenue.

On peut demander de déterminer y_1, y_2, y_3, si λ, μ, ν sont donnés, et inversement. Le premier problème se résout facilement à l'aide des formules (31), (35). On trouve ainsi

$$\frac{1}{ay_1} = \nu(b\mu + c\nu - a\mu\nu) = \nu\lambda(b\nu + c\mu - a).$$

par conséquent,

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} &= a(b\mu + c\nu - a\mu\nu) : b(c\nu + a\lambda - b\nu\lambda) \\ &\qquad : c(a\lambda + b\mu - c\mu\nu) \\ &= a\lambda(b\nu + c\mu - a) : b\mu(c\lambda + a\nu - b) \\ &\qquad : c\nu(a\mu + b\lambda - c). \end{aligned}\right.$$

Afin de trouver la solution du problème inverse, nous remarquons que, d'après (35), on a

$$(44)\qquad \lambda^2 + \lambda\mu\nu = \lambda\,\frac{p_1}{\varrho} \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \frac{p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - \alpha}}{2\varrho};$$

si, pour abréger, nous posons

$$4\lambda\mu\nu\varrho^2 = \alpha.$$

La multiplication des valeurs de λ, μ, ν ainsi obtenues fournit

$$\varrho = \frac{(p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - \alpha})(p_2 \pm \sqrt{p_2^2 - \alpha})(p_3 \pm \sqrt{p_3^2 - \alpha})}{2\alpha},$$

et ensuite, d'après (44),

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda &= \frac{(p_2 \mp \sqrt{p_2^2 - \alpha})(p_3 \mp \sqrt{p_3^2 - \alpha})}{\alpha}, \\ \mu &= \frac{(p_3 \mp \sqrt{p_3^2 - \alpha})(p_1 \mp \sqrt{p_1^2 - \alpha})}{\alpha}, \\ \nu &= \frac{(p_1 \mp \sqrt{p_1^2 - \alpha})(p_2 \mp \sqrt{p_2^2 - \alpha})}{\alpha}, \end{aligned}\right.$$

de sorte que λ, μ, ν sont exprimées en fonction d'une seule variable α, laquelle, elle-même, est déterminée par l'équation

$$(46)\qquad a\sqrt{p_1^2 - \alpha} + b\sqrt{p_2^2 - \alpha} + c\sqrt{p_3^2 - \alpha} = 0,$$

qui s'obtient en substituant les valeurs de λ, μ, ν dans la formule (36).

On en peut conclure qu'à un système déterminé de valeurs λ, μ, ν, un seul point y_1, y_2, y_3 correspond, tan-

dis que à un système déterminé de valeurs de y_1, y_2, y_3 plusieurs systèmes de directions λ, μ, ν correspondent.

L'équation (36) peut être mise sous la forme suivante :

$$a\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu\nu}\right) + b\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu\lambda}\right) + c\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\lambda\mu}\right) = 0,$$

d'où il suit que, si un système de valeurs de λ, μ, ν satisfait à l'équation (36), il en est de même des valeurs $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{\nu}$.

Soit y'_1, y'_2, y'_3 le centre d'homologie correspondant aux directions $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{\nu}$.

On aura, d'après la formule (43),

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{y'_1} : \frac{1}{y'_2} : \frac{1}{y'_3} \\
&= \frac{a}{\lambda}\left(\frac{b}{\nu} + \frac{c}{\mu} - a\right) : \frac{b}{\mu}\left(\frac{c}{\lambda} + \frac{a}{\nu} - b\right) : \frac{c}{\nu}\left(\frac{a}{\mu} + \frac{b}{\lambda} - c\right) \\
&= a(b\mu + c\nu - a\mu\nu) : b(c\nu + a\lambda - b\nu\lambda) : c(a\lambda + b\mu - c\lambda\mu) \\
&= \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3},
\end{aligned}$$

ce qui montre que les points y_1, y_2, y_3 et y'_1, y'_2, y'_3 coïncident. De là ce théorème :

Si l'on trace des triangles abc jouissant des propriétés suivantes :

1° *Les côtés sont homologiques à un triangle fixe* ABC, *le point* O *étant le centre d'homologie ;*

2° *Ils sont parallèles aux directions* λ, μ, ν ;

3° *Ces côtés déterminent sur les côtés non homologues du triangle* ABC *six points concycliques ; tout triangle jouissant de la première propriété et dont les côtés sont parallèles aux conjugués isogonaux des directions* λ, μ, ν *par rapport au triangle* ABC, *jouira aussi de la troisième.*

Des simplifications considérables s'obtiennent si l'on exprime les quantités λ, μ, ν en fonction des angles sous lesquels les directions désignées par λ, μ, ν rencontrent les côtés du triangle ABC.

Soit φ_1 l'angle entre la direction λ et le côté AB, qu'on regarde comme positif, si le sens de la rotation du côté AB vers λ coïncide avec celui de la rotation qui fait tourner AC vers AB. Désignons de même par φ_2, φ_3 les angles entre BC, CA et les directions μ, ν. On aura

(47) $$\lambda = \frac{\sin(\varphi_1 + A)}{\sin\varphi_1}, \qquad \mu = \frac{\sin(\varphi_2 + B)}{\sin\varphi_2}, \qquad \nu = \frac{\sin(\varphi_3 + C)}{\sin\varphi_3}.$$

Substituons ces valeurs prises sous la forme

$$\lambda = \cos A + \cot\varphi_1 \sin A, \qquad \mu = \cos B + \cot\varphi_2 \sin B, \qquad \ldots$$

dans l'équation (36). Après quelques réductions, on obtiendra

$$\cot\varphi_2 \cot\varphi_3 + \cot\varphi_3 \cot\varphi_1 + \cot\varphi_1 \cot\varphi_2 = 1,$$

d'où il suit facilement

(48) $$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = m\pi \qquad (m \text{ entier}).$$

Nous parvenons ainsi à ce théorème intéressant :

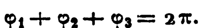
Si trois directions λ, μ, ν *sont telles que la somme de leurs inclinaisons sur les côtés d'un triangle* ABC (*ces angles étant pris dans un sens convenu*) *soit un multiple de* π, *il sera possible de tracer des triangles homologiques au triangle* ABC *par rapport à un centre d'homologie déterminé, ayant leurs côtés parallèles aux directions* λ, μ, ν, *tandis que ces côtés coupent les côtés non homologues de* ABC *en six points concycliques.*

Par les deux équations (36), (48) exprimant la même condition, on est conduit à ce théorème :

Si, sur les trois côtés BC, CA, AB *d'un triangle ou*

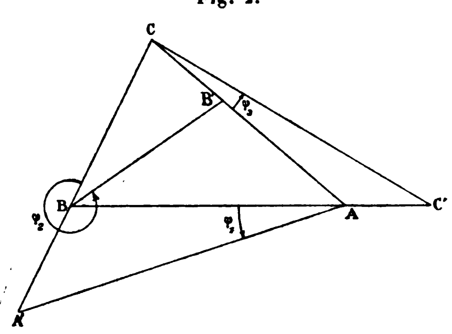
sur leurs prolongements, trois points A′, B′, C′ *sont pris tels que la somme des angles* BAA′, CBB′, ACC′, *pris dans un sens convenu, soit un multiple de* π, *la somme des produits des deux perpendiculaires abaissées de* B′, C′ *sur* BC, *de* C′, A′ *sur* CA *et de* A′, B′ *sur* AB *devra s'annuler.*

Voici une démonstration directe de ce théorème : Soit (*fig.* 2)



$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi.$$

Fig. 2.



On trouve facilement

$$(49)\quad \begin{cases} BA' = \dfrac{c \sin\varphi_1}{\sin(B - \varphi_1)}, \\ CB' = -\dfrac{a \sin\varphi_2}{\sin(C - \varphi_2)}, \\ AC' = \dfrac{b \sin\varphi_3}{\sin(A - \varphi_3)}, \\ CA' = \dfrac{b \sin(A + \varphi_1)}{\sin(B - \varphi_1)}, \\ AB' = -\dfrac{c \sin(B + \varphi_2)}{\sin(C - \varphi_2)}, \\ BC' = \dfrac{a \sin(C + \varphi_3)}{\sin(A - \varphi_3)}. \end{cases}$$

Or, R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle

ABC, on aura

$$\frac{4R^2}{abc}(l_a^b l_a^c + l_b^c l_b^a + l_c^a l_c^b) = \frac{BC'.CB'}{a} + \frac{CA'.AC'}{b} + \frac{AB'.BA'}{c}.$$

Dans le second membre de cette équation, substituons les valeurs de BA', CB', ... Après la réduction de chacune des fractions au dénominateur commun,

$$\sin(\varphi_1 - B)\sin(\varphi_2 - C)\sin(\varphi_3 - A),$$

on obtient comme numérateurs

$$a\sin(B - \varphi_1)\sin\varphi_2\sin(C + \varphi_3)$$

et deux autres provenant de la précédente par une permutation cyclique de a, b, c; φ_1, φ_2, φ_3. Il est d'ailleurs facile de démontrer que la relation

$$\begin{aligned} &a\sin(B - \varphi_1)\sin\varphi_2\sin(C + \varphi_3) \\ &= \frac{R}{4}\cos(m+1)\pi[\cos 2C - \cos 2B \\ &\qquad + \cos 2\varphi_1 - \cos 2\varphi_3 - \cos 2(A + \varphi_1) \\ &\qquad + \cos 2(B + \varphi_2) - \cos 2(C - \varphi_2) + \cos 2(A - \varphi_3)] \end{aligned}$$

a lieu. Il s'ensuit que la somme des trois numérateurs s'annule, ce qui démontre le théorème.

Les valeurs (43) de y_1, y_2, y_3 se changent par l'introduction de φ_1, φ_2, φ_3 en

$$(50)\quad \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} = \sin\varphi_1\sin(A + \varphi_1) : \sin\varphi_2\sin(B + \varphi_2) : \sin\varphi_3\sin(C + \varphi_3).$$

Afin de déduire de ces équations φ_1, φ_2, φ_3, les coordonnées y_1, y_2, y_3 étant données, posons

$$\sin\varphi_1\sin(A + \varphi_1) = -\frac{m}{2y_1},$$

$$\sin\varphi_2\sin(B + \varphi_2) = -\frac{m}{2y_2},$$

$$\sin\varphi_3\sin(C + \varphi_3) = -\frac{m}{2y_3},$$

ou

$$(51)\quad \begin{cases} \cos(2\varphi_1 + A) = \cos A + \dfrac{m}{y_1}, \\ \cos(2\varphi_2 + B) = \cos B + \dfrac{m}{y_2}, \\ \cos(2\varphi_3 + C) = \cos C + \dfrac{m}{y_3}, \end{cases}$$

équations par lesquelles m est facilement déterminé. En effet, on a

$$\begin{aligned} &2(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + A + B + C \\ &\quad = \arc\cos\left(\cos A + \frac{m}{y_1}\right) + \arc\cos\left(\cos B + \frac{m}{y_2}\right) \\ &\qquad\qquad + \arc\cos\left(\cos C + \frac{m}{y_3}\right) = (2m+1)\pi. \end{aligned}$$

En prenant le cosinus des deux membres de la dernière équation, on arrive, après division par m, à l'équation (52)

$$(52)\quad \begin{cases} \dfrac{m^2}{y_1 y_2 y_3} + \dfrac{m}{2}\left(\dfrac{1}{y_1^2} + \dfrac{1}{y_2^2} + \dfrac{1}{y_3^2} + 2\dfrac{\cos A}{y_2 y_3} + 2\dfrac{\cos B}{y_3 y_1} + 2\dfrac{\cos C}{y_1 y_2}\right) \\ \qquad + \dfrac{\sin B \sin C}{y_1} + \dfrac{\sin C \sin A}{y_2} + \dfrac{\sin A \sin B}{y_3} = 0 \end{cases}$$

La valeur $m = 0$ donne

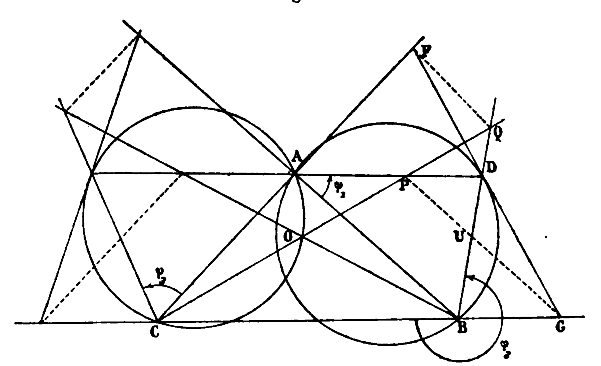
$$\varphi_1 = k\pi \qquad \text{ou} \qquad \varphi_1 = k\pi - A;$$

cela veut dire que AA' coïncide avec AC ou avec AB. De même BB', CC' coïncideront avec AB, BC ou avec BC, CA respectivement. C'est un cas particulier que nous considérons plus tard.

De l'équation (52) on tire ensuite pour m deux valeurs, dont chacune fournit d'après (51) deux valeurs de φ_1, φ_2, φ_3. En général donc à un seul système de valeurs pour y_1, y_2, y_3 quatre directions λ, μ, ν correspondent, qu'on pourra réunir de plusieurs manières à des systèmes de directions λ, μ, ν.

La construction suivante peut servir à déterminer le centre d'homologie O, les directions λ, μ, ν étant données par AA′, BB′, CC′. Soit D (*fig.* 3) le point d'inter-

Fig. 3.



section des droites AA′, BB′ et DG la tangente en D au cercle circonscrit au triangle ABD. Cette tangente coupe BC en G, AC en F. Par ces points G, F traçons des droites parallèles à AB rencontrant AD, BD en P, Q. Je dis que le point O est situé sur CP ou CQ. En effet, les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la droite CP sur BC, AC sont proportionnelles à

$$\mathrm{PG}\sin B, \qquad \mathrm{AP}\sin(\varphi_1 + A)$$

ou à

$$-\mathrm{DG}\sin(\varphi_2 + B)\sin B, \qquad \mathrm{AP}\sin\varphi_1\sin(\varphi_1 + A).$$

Or, comme PG est parallèle à AB, si U est le point d'intersection de BD et PG, on aura

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PD} = \mathrm{BU} : \mathrm{UD},$$

et ensuite

$$\mathrm{BU} : \mathrm{UG} = \sin B : -\sin\varphi_2;$$

par conséquent,

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PD} = \mathrm{UG}\sin B : -\mathrm{UD}\sin\varphi_2.$$

D'ailleurs la similitude des triangles UDG, PDG donne

$$UG : UD = DG : DP,$$

de sorte qu'on obtient

$$AP : PD = DG \sin B : - PD \sin \varphi_2$$

ou

$$AP : DG = \sin B : - \sin \varphi_2.$$

Enfin le rapport des deux perpendiculaires abaissées d'un point de la droite CP sur BC, AC devient

$$\sin \varphi_2 \sin(\varphi_2 + B) : \sin \varphi_1 \sin(\varphi_1 + A).$$

On trouve le même rapport pour les perpendiculaires abaissées du point Q sur BC, AC, d'où il suit que les points C, P, Q sont sur une même ligne droite passant par O. En partant de BB′, CC′ on pourra trouver une seconde droite, sur laquelle O devra être situé.

Nous passons maintenant à la considération de quelques cas particuliers :

1° $\varphi_1 = B$, $\varphi_2 = C$, $\varphi_3 = A$ valeurs qui satisfont à l'équation (48); les directions λ, μ, ν sont maintenant parallèles à BC, CA, AB. On trouve

$$\frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} = \sin B \sin C : \sin C \sin A : \sin A \sin B,$$
$$y_1 : y_2 : y_3 = a : b : c,$$

ce qui veut dire que le centre d'homologie coïncide avec le point de Lemoine. Nous sommes arrivés ainsi au théorème connu de M. Lemoine.

2° $\varphi_1 = C$, $\varphi_2 = A$, $\varphi_3 = B$. Les directions λ, μ, ν sont antiparallèles à BC, CA, AB.

On trouvera que le centre d'homologie coïncide de nouveau avec le point de Lemoine. On a donc ce théorème :

Si l'on trace des triangles abc homologiques à un

triangle donné ABC, *le point de Lemoine du dernier étant le centre d'homologie et les côtés de abc étant antiparallèles à* BC, CA, AB, *les points d'intersection des côtés non homologues des triangles abc*, ABC *seront concycliques.* (*A suivre.*)

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. ROUCHÉ;

PAR M. LUCIEN LÉVY.

Les *Nouvelles Annales* ont publié, l'année dernière (t. X, p. 111), un bien intéressant théorème dû à M. Daniel Mayer et dont voici l'énoncé :

Si, dans une équation algébrique, le coefficient de x^{m-k} a un module supérieur à la somme des modules des autres coefficients, l'équation a $m-k$ racines dont le module est inférieur à 1 et k racines de module supérieur à 1.

M. Ém. Picard m'en communique une démonstration qui intéressera sûrement vos lecteurs.

Soit l'équation

$$(1) \qquad A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_k x^{m-k} + \ldots + A_m = 0.$$

Et d'abord, si

$$(2) \quad |A_k| > |A_0| + |A_1| + \ldots + |A_{k-1}| + |A_{k+1}| + \ldots + |A_m|,$$

l'équation (1) ne pourra pas avoir de racine dont le module serait égal à *un*; car, dans ce cas, on a évidemment

$$|A_k| < |A_0| + \ldots,$$

puisque le module d'une somme est plus petit que la somme des modules.

Ceci posé, faisons varier d'une manière continue les coefficients de (1), l'inégalité (2) étant toujours vérifiée. Pendant cette variation, aucune racine ne pourra traverser la circonférence de rayon *un*. Il suffit donc de prendre un cas particulier; le plus simple est celui de l'équation

$$A_0 x^m + A_k x^{m-k} = 0,$$

avec

$$|A_k| > |A_0|;$$

or, sur cette équation le théorème est évident.

SUR LES ANGLES ET LES DISTANCES EN COORDONNÉES TRILINÉAIRES;

Par M. VOGT,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Nancy.

---

1. Si l'on considère un triangle de référence et les distances d'un point aux trois côtés de ce triangle, affectées d'un signe convenable, on appelle ordinairement *coordonnées trilinéaires* de ce point trois nombres respectivement proportionnels à ces distances ou aux produits de ces distances par trois coefficients fixes appelés *paramètres de référence*.

Lorsque l'on veut établir les formules relatives à l'angle de deux droites, à la distance d'un point à une droite, ou reconnaître si une équation représente un cercle, on commence par établir ces formules dans un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires; les équations des côtés du triangle de référence dans ce

système fournissent des formules de transformation qui permettent de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées trilinéaires, et conduisent au résultat cherché.

Les relations métriques qui existent entre les éléments d'une figure ne sont autres que les relations qui lient ces éléments aux points cycliques du plan. Laguerre a montré (*Nouvelles Annales*; 1859) que l'angle de deux droites a pour expression $\varphi = \frac{i}{2} \log \alpha$, α étant le rapport anharmonique du faisceau formé par ces droites et celles qui joignent le sommet de l'angle aux points cycliques. M. Klein, dans un remarquable article [*Ueber die sogenannte nicht euklidische Geometrie* (*Mathematische Annalen*, Bd. IV)], a donné les formules générales qui lient les éléments d'une figure à ceux d'une conique fixe fondamentale du plan; lorsque cette conique se réduit à deux points imaginaires conjugués, on peut retrouver les formules de la Géométrie ordinaire. Je vais montrer que les calculs, dans ce cas, donnent toutes les formules de la théorie des coordonnées trilinéaires.

DES COORDONNÉES DE POINTS ET DE DROITES.

2. Étant donné un triangle ABC, nous déterminerons la position d'une droite indéfinie passant par A, au moyen d'un paramètre α qui ne diffère que par un facteur constant du rapport des segments qu'elle détermine sur le côté BC; ce paramètre, variant de zéro à $+\infty$, lorsque la droite passe de la position AC à la position AB en décrivant l'angle intérieur du triangle. De même, nous fixons la position d'une droite issue de B par un paramètre β, proportionnel au rapport des segments

qu'elle détermine sur AC et variant de zéro à $+\infty$, lorsque la droite passe de BA à BC.

Les deux nombres α et β déterminent alors deux droites AM, BM et peuvent être employés comme coordonnées de leur point M de rencontre; mais nous poserons

$$\frac{y}{z} = \alpha, \qquad \frac{z}{x} = \beta,$$

et les trois nombres x, y, z, ainsi déterminés par leurs rapports, seront appelés *coordonnées du point* M. Nous ajouterons pour la symétrie : $\frac{x}{y} = \gamma$; le nombre γ, qui satisfait à la relation $\alpha\beta\gamma = 1$, servira à définir la position de la droite CM; ce paramètre est proportionnel au rapport des segments déterminés par CM sur le côté AB.

3. Toute droite est représentée par une équation du premier degré entre les coordonnées de ses points. En effet, les rayons joignant les points A et B à un point de la droite forment deux faisceaux homographiques ayant le rayon AB homologue commun; il existe entre α et β une relation linéaire de la forme

$$\frac{-u}{\beta} + v\alpha + w = 0;$$

par suite, on a

$$ux + vy + wz = 0.$$

Et, réciproquement, toute relation de cette forme représente une droite, car elle définit deux faisceaux homographiques de sommets A et B ayant un rayon homologue commun.

Par définition, u, v, w sont appelés les *coordonnées de la droite*. Par analogie avec ce qui précède, on peut remarquer que, si l'on prend les points de rencontre

d'une droite avec les trois côtés du triangle de référence, les rapports

$$\alpha' = -\frac{w}{v}, \qquad \beta' = -\frac{u}{w}, \qquad \gamma' = -\frac{v}{u}$$

sont respectivement proportionnels aux rapports des segments déterminés par ces points de rencontre sur les côtés correspondants ; de plus

$$\alpha'\beta'\gamma' = -1.$$

Toute relation du premier degré entre u, v, w

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 = 0$$

détermine le point qui a pour coordonnées $x_0 y_0 z_0$ et est l'équation de ce point. La théorie de la ligne droite et du point se déduit de ce qui précède.

DES POINTS CYCLIQUES ET DES ANGLES.

4. Considérons dans le plan deux points fondamentaux ou points cycliques, dont les coordonnées sont imaginaires conjuguées ; soient I et J ces deux points,

$$\begin{array}{lll} \xi + i\xi', & \eta + i\eta', & \zeta + i\zeta', \\ \xi - i\xi', & \eta - i\eta', & \zeta - i\zeta', \end{array}$$

leurs coordonnées ; la droite qui les joint est appelée *droite fondamentale* ou *droite de l'infini*, et a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation tangentielle des deux points cycliques, si

l'on pose

$$p(u) = \xi u + \eta v + \zeta w,$$
$$p'(u) = \xi' u + \eta' v + \zeta' w,$$

est

$$\begin{aligned}\varphi(uvw) &= [p(u) + ip'(u)][p(u) - ip'(u)] \\ &= p(u)^2 + p'(u)^2 \\ &= (\xi^2 + \xi'^2)u^2 + (\eta^2 + \eta'^2)v^2 + (\zeta^2 + \zeta'^2)w^2 \\ &\quad + 2(\eta\zeta + \eta'\zeta')vw + 2(\zeta\xi + \zeta'\xi')wu + 2(\xi\eta + \xi'\eta')uv = 0.\end{aligned}$$

L'angle de deux droites $(u_0 v_0 w_0)$, $(u_1 v_1 w_1)$ sera, par définition, fourni par la relation

$$V = \frac{i}{2} \log \rho,$$

ou bien

$$\rho = \frac{1 - i \tang V}{1 + i \tang V},$$

ρ étant le rapport anharmonique que forment les droites avec celles qui joignent le sommet de l'angle aux points cycliques.

Si

$$u_0 + \lambda_1 u_1, \quad v_0 + \lambda_1 v_1, \quad w_0 + \lambda_1 w_1;$$
$$u_0 + \lambda_2 u_1, \quad v_0 + \lambda_2 v_1, \quad w_0 + \lambda_2 w_1$$

sont les coordonnées de ces dernières droites, on a

$$\lambda_1 = -\frac{p(u_0) + ip'(u_0)}{p(u_1) + ip'(u_1)}, \qquad \lambda_2 = -\frac{p(u_0) - ip'(u_0)}{p(u_1) - ip'(u_1)},$$

et le rapport ρ est égal à $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, ou bien

$$\rho = \frac{p(u_0)p(u_1) + p'(u_0)p'(u_1) + i[p'(u_0)p(u_1) - p(u_0)p'(u_1)]}{p(u_0)p(u_1) + p'(u_0)p'(u_1) - i[p'(u_0)p(u_1) - p(u_0)p'(u_1)]}.$$

On en conclut

$$\tang V = -\frac{p'(u_0)p(u_1) - p(u_0)p'(u_1)}{p(u_0)p(u_1) + p'(u_0)p'(u_1)},$$

$$\sin V = \frac{p'(u_0)p(u_1) - p(u_0)p'(u_1)}{\sqrt{\varphi(u_0 v_0 w_0)}\sqrt{\varphi(u_1 v_1 w_1)}},$$

$$\cos V = -\frac{p(u_0)p(u_1) + p'(u_0)p'(u_1)}{\sqrt{\varphi(u_0 v_0 w_0)}\sqrt{\varphi(u_1 v_1 w_1)}}.$$

5. En particulier, on aura pour l'angle de AB avec AC

$$\sin A = \frac{\eta\zeta' - \zeta\eta'}{\sqrt{\eta^2 + \eta'^2}\sqrt{\zeta^2 + \zeta'^2}},$$

$$\cos A = \frac{\eta\zeta + \eta'\zeta'}{\sqrt{\eta^2 + \eta'^2}\sqrt{\zeta^2 + \zeta'^2}},$$

et pour les angles B et C des formules analogues. Il y a en réalité indétermination relativement aux signes à mettre devant les radicaux; mais il faut les prendre tous avec le même signe si l'on veut que ABC représentent les angles intérieurs du triangle, c'est-à-dire satisfassent à la relation

$$A + B + C = \pi.$$

Nous poserons

$$\sqrt{\xi^2 + \xi'^2} = \lambda, \qquad \sqrt{\eta^2 + \eta'^2} = \mu, \qquad \sqrt{\zeta^2 + \zeta'^2} = \nu,$$

λ, μ, ν étant trois nombres appelés *paramètres de référence.* On peut alors écrire l'équation de la droite de l'infini sous la forme

$$\frac{x \sin A}{\lambda} + \frac{y \sin B}{\mu} + \frac{z \sin C}{\nu} = 0,$$

et celle des points cycliques

$$\begin{aligned}\varphi(uvw) &= \lambda^2 u^2 + \mu^2 v^2 + \nu^2 w^2 - 2\mu\nu \cos A\, vw \\ &\qquad - 2\nu\lambda \cos B\, wu - 2\lambda\mu \cos C\, uv = 0.\end{aligned}$$

La formule qui donne l'angle de deux droites se réduit, par l'introduction de A, B, C, à

$$\tang V = \frac{\left\{\begin{array}{c}(v_0 w_1 - w_0 v_1)\mu\nu \sin A + (w_0 u_1 - u_0 w_1) \\ \nu\lambda \sin B + (u_0 v_1 - v_0 u_1)\lambda\mu \sin C\end{array}\right\}}{\frac{1}{2}(u_0 \varphi'_{u_1} + v_0 \varphi'_{v_1} + w_0 \varphi'_{w_1}}.$$

On voit que tang V s'annule lorsque le point de rencontre des deux droites se trouve sur la droite fondamentale et

devient infini lorsque les deux droites sont conjuguées par rapport aux points fondamentaux.

DES DISTANCES.

6. Dans le cas où la conique fondamentale du plan ne se réduit pas à une droite double, au point de vue ponctuel, on peut définir la distance de deux points comme une fonction du rapport anharmonique formé par les deux points et les points de rencontre de la droite qui les joint avec la conique. M. Klein a donné les formules générales et celles qui s'en déduisent dans le cas limite où cette conique dégénère en une droite double; il reste alors une indéterminée arbitraire, qui est, en somme, l'unité de longueur. On peut définir la distance de deux points A, B comme le rapport anharmonique (A, C, B, A′), C étant le point de rencontre de AB avec la droite fondamentale et A′ un point tel que le segment AA′ soit égal à l'unité choisie, mais je préfère m'appuyer sur la théorie des cercles.

7. Un cercle est une conique bitangente à la conique formée par les deux points fondamentaux; son centre est le pôle de contact; son équation est de la forme

$$R^2\varphi(uvw)D(x_0y_0z_0)^2-(ux_0+vy_0+wz_0)^2=0,$$

en désignant par $D(x,y,z)$ le premier membre de l'équation de la droite fondamentale avec un coefficient arbitraire K

$$D(x,y,z)=K\left(\frac{x\sin A}{\lambda}+\frac{y\sin B}{\mu}+\frac{z\sin C}{\nu}\right).$$

On voit que l'équation est homogène, par rapport à u, v, w, à λ, μ, ν et aux coordonnées x_0, y_0, z_0 du centre. Nous dirons, par définition, que R est le rayon du cercle

et que la distance du centre à un point de la courbe est constante et égale à R.

Si nous appelons *droites perpendiculaires* deux droites conjuguées par rapport aux points fondamentaux, et *distance d'un point à une droite* sa distance au pied de la perpendiculaire abaissée sur la droite, nous voyons, d'après la théorie des coniques bitangentes, que tout rayon d'un cercle est perpendiculaire à la tangente à l'extrémité, et que le centre d'un cercle est à une distance constante et égale à R de ses tangentes.

La distance d'un point à une droite sera, d'après cela,

$$d = \pm \frac{ux_0 + vy_0 + wz_0}{D(x_0, y_0, z_0)\sqrt{\varphi(u, v, w)}}.$$

La distance de deux points s'obtiendra en cherchant la distance de l'un d'eux à la perpendiculaire menée par l'autre à la droite qui les joint, ou bien se déduira de l'équation ponctuelle des cercles que l'on peut former en partant de l'équation tangentielle précédente.

Il reste à justifier la définition adoptée pour la distance. Je remarque d'abord que le lieu des centres des cercles de rayon R tangent à une droite (x, v, w) se compose de deux droites parallèles à la première

$$ux + vy + wz \pm R\sqrt{\varphi(u, v, w)}\, D(x, y, z) = 0,$$

puisqu'elles vont la rencontrer sur la droite fondamentale. Ensuite, si l'on prend un point x, y, z sur la première droite

$$ux + vy + wz = 0,$$

et si l'on cherche sa distance à l'une des parallèles précédentes, on constate qu'elle est égale à $\pm R$.

Donc deux parallèles sont partout également distantes et la valeur absolue de la longueur d'un segment est

indépendante du sens suivant lequel est décrit ce segment.

Je vais enfin montrer que si l'on prend à partir d'un point A, sur une droite fixe, des segments AB et AB' égaux à R et R', et si C est le point de rencontre de ABB' avec la droite fondamentale, le rapport anharmonique

$$(\mathrm{ACBB'}) = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB'}} : \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CB'}}$$

est égal à $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R'}}$.

B et B' sont les centres de deux cercles tangents en A à la perpendiculaire à AB, et ayant pour rayon R et R'; si

$$ux + vy + wz = 0$$

est l'équation de cette perpendiculaire, les points B et B' sont sur les droites

$$ux + vy + wz + \mathrm{R}\sqrt{\varphi(u, v, w)}\,\mathrm{D}(x, y, z) = 0,$$
$$ux + vy + wz + \mathrm{R'}\sqrt{\varphi(u, v, w)}\,\mathrm{D}(x, y, z) = 0,$$

et le rapport anharmonique de ces droites et de la droite fondamentale est bien égal à $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R'}}$, ce qui démontre la proposition. On retombe ainsi sur la définition de la distance indiquée au n° 6.

8. Je vais appliquer les résultats précédents au triangle de référence lui-même. Les distances du point x_0, y_0, z_0 aux trois côtés sont respectivement

$$\frac{x_0}{\lambda}\,\frac{1}{\mathrm{D}(x_0, y_0, z_0)},\quad \frac{y_0}{\mu}\,\frac{1}{\mathrm{D}(x_0, y_0, z_0)},\quad \frac{z_0}{\nu}\,\frac{1}{\mathrm{D}(x_0, y_0, z_0)}.$$

De même les distances des trois sommets à une droite (u, v, w) sont respectivement

$$\frac{\lambda u}{\mathrm{K}\sin \mathrm{A}\sqrt{\varphi(u, v, w)}},\quad \frac{\mu v}{\mathrm{K}\sin \mathrm{B}\sqrt{\varphi(u, v, w)}},\quad \frac{\nu w}{\mathrm{K}\sin \mathrm{C}\sqrt{\varphi(u, v, w)}}.$$

Les coordonnées d'un point et celles d'une droite, que nous avons définies au n° 2, indépendamment de la notion de points fondamentaux et de droite fondamentale du plan, trouvent ainsi leur interprétation dans les distances du point aux côtés du triangle, affectées des coefficients λ, μ, ν, et dans celles des distances de la droite aux trois sommets, affectées des coefficients $\frac{\sin A}{\lambda}$, $\frac{\sin B}{\mu}$, $\frac{\sin C}{\nu}$. En particulier, les hauteurs du triangle sont égales à

$$\frac{1}{K \sin A}, \quad \frac{1}{K \sin B}, \quad \frac{1}{K \sin C},$$

ce qui fixe l'unité de longueur en fonction des éléments du triangle; si l'on veut par exemple que les côtés soient représentés par a, b, c, on prendra

$$K = \frac{4R^2}{abc} = \frac{R}{S},$$

R étant le rayon du cercle circonscrit et S la surface.

Le système ordinairement employé est celui dans lequel $\lambda = \mu = \nu = 1$, et $D(x_0, y_0, z_0) = 1$; x_0, y_0, z_0 sont alors égales aux distances du point dont elles sont les coordonnées, aux trois côtés du triangle.

9. Je terminerai par la remarque suivante : La polaire d'un point (x, y, z), par rapport au triangle considéré comme cubique, a pour coordonnées $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$, $w = \frac{1}{z}$. La transformée de cette droite par polaires réciproques, par rapport à la conique

$$\lambda^2 u^2 + \mu^2 v^2 + \nu^2 w^2 = 0,$$

est le point

$$x' = \frac{\lambda^2}{x}, \quad y' = \frac{\mu^2}{y}, \quad z' = \frac{\nu^2}{z}.$$

Ces formules définissent une transformation de Cremona particulière, ayant les sommets du triangle comme points fondamentaux, et connue sous le nom de *transformation par points inverses.*

Comme

$$\lambda^2 = (\xi + i\xi')(\xi - i\xi'),$$
$$\mu^2 = (\eta + i\eta')(\eta - i\eta'),$$
$$\nu^2 = (\zeta + i\zeta')(\zeta - i\zeta'),$$

la transformation change les points cycliques l'un dans l'autre. Elle fait correspondre à la droite de l'infini le cercle circonscrit au triangle, de sorte que l'on obtient immédiatement l'équation de ce cercle, qui est

$$\frac{\lambda \sin A}{x} + \frac{\mu \sin B}{y} + \frac{\nu \sin C}{z} = 0,$$

et l'équation ponctuelle générale des cercles est

$$\lambda \sin A\, yz + \mu \sin B\, zx + \nu \sin C\, xy$$
$$+ K(\alpha x + \beta y + \gamma z)\left(\frac{x \sin A}{\lambda} + \frac{y \sin B}{\mu} + \frac{z \sin C}{\nu}\right) = 0.$$

ERRATA.

Page 112, ligne 12, *au lieu de*

$$\left(m^{\sqrt{-1}}\right)^{\sqrt{-1}} = m^{\sqrt{-1}\sqrt{-1}} m^{-1} = \frac{1}{m},$$

lisez

$$\left(m^{\sqrt{-1}}\right)^{\sqrt{-1}} = m^{\sqrt{-1}\,\sqrt{-1}} = m^{-1} = \frac{1}{m}.$$

NOTE SUR LES SURFACES A GÉNÉRATRICE CIRCULAIRE;

PAR M. A. BOULANGER,
Agrégé de l'Université.

On se propose de déterminer les surfaces à génératrice circulaire telles que les plans tangents tout le long de chaque génératrice enveloppent un cône.

Considérons, avec M. Demartres (*Annales de l'École Normale*, 1885), le trièdre formé par l'axe OZ du cercle qui engendre la surface, et par deux diamètres rectangulaires OX et OY invariablement liés au plan de ce cercle. Soient ξ, η, ζ et p, q, r les composantes, par rapport à ces axes, de la vitesse de l'origine O et de la rotation instantanée du trièdre autour du point O, dans la génération de la surface.

Les projections du déplacement d'un point, dont les coordonnées sont x, y, z, relativement aux axes mobiles, sont

$$dx+(\xi+qz-ry)\,du,$$
$$dy+(\eta+rx-pz)\,du,$$
$$dz+(\zeta+py-qx)\,du,$$

u désignant, je suppose, l'arc de trajectoire du point O.

Le cercle générateur étant dans le plan des xy, les coordonnées d'un de ses points sont exprimables par les formules

$$x=\mathrm{R}\cos v,\qquad y=\mathrm{R}\sin v,\qquad z=0,$$

où R est une fonction de u, et où v est la variable qui détermine un point sur chaque cercle. En tenant compte de ces valeurs de x, y, z, on aura pour les pro-

jections du déplacement

$$(1)\quad \begin{cases} M\cos v\,du - (N\,du + R\,dv)\sin v, \\ M\sin v\,du + (N\,du + R\,dv)\cos v, \\ P\,du, \end{cases}$$

en posant

$$M = \frac{dR}{du} + \xi\cos v + \eta\sin v,$$
$$N = rR + \eta\cos v - \xi\sin v,$$
$$P = \zeta + pR\sin v - qR\cos v.$$

Le plan tangent en un point de la surface contenant la tangente à la génératrice circulaire qui passe par ce point, son équation par rapport aux axes mobiles est de la forme

$$X\cos v + Y\sin v - R = \lambda Z;$$

déterminons λ de manière que tout déplacement (1) soit situé dans ce plan, et nous aurons

$$M = \lambda P.$$

L'équation du plan tangent est donc

$$[X\cos v + Y\sin v - R][\zeta + pR\sin v - qR\cos v] = \left[\frac{dR}{du} + \xi\cos v + \eta\sin v\right]Z,$$

ou en posant

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2} = t,$$

$$[(1-t^2)X + 2tY - (1+t^2)R][\zeta(1+t^2) + 2pRt - qR(1-t^5)] = (1+t^2)\left[\frac{dR}{du}(1+t^2) + \zeta(1-t^2) + 2t\eta\right]Z.$$

Pour que ce plan passe par un point fixe, quel que soit le point sur la génératrice circulaire, c'est-à-dire quel que soit t, il faut et il suffit qu'il existe un point dont les coordonnées X, Y, Z annulent les coefficients de cette équation du quatrième degré en t. On obtient

ainsi les relations

$$(X-R)(\zeta-qR)=\left(\frac{dR}{du}+\xi\right)Z,$$

$$-(X+R)(\zeta+qR)=\left(\frac{dR}{du}-\xi\right)Z,$$

$$Y(\zeta-qR)+pR(X-R)=\eta Z,$$

$$Y(\zeta+qR)-pR(X+R)=\eta Z,$$

$$(X-R)(\zeta+qR)-(X+R)(\zeta-qR)+4pRY=2\frac{dR}{du}Z.$$

Ces équations se réduisent aux suivantes, par voie d'addition et soustraction,

$$(2)\qquad \begin{cases} -R(\zeta+qX)=\dfrac{dR}{du}Z, \\ X\zeta+qR^2=\xi Z, \\ Y\zeta-pR^2=\eta Z, \end{cases}$$

$$(pX-qY)R=0,$$

$$-R(\zeta-qX)+2RpY=Z\frac{dR}{du}.$$

Eu égard à la première relation, la dernière se simplifie, et comme R n'est pas identiquement nul, nous aurons à adjoindre aux trois premières relations (2) les deux suivantes

$$(3)\qquad \begin{cases} pX-qY=0, \\ qX+pY=0. \end{cases}$$

On ne peut satisfaire par des valeurs réelles à ces deux relations (3) que de deux manières, soit en posant $X=0$, $Y=0$; soit en posant $p=0$, $q=0$.

1° Si $X=0$, $Y=0$, le sommet du cône est sur l'axe du cercle. Ce cône est donc de révolution; par suite, les génératrices circulaires sont lignes de courbure de la surface, et celle-ci est une enveloppe de sphères.

Le sommet du cône a pour cote

$$Z=-\frac{R}{\dfrac{dR}{du}}\zeta;$$

le déplacement et la déformation du cercle sont assujettis aux relations

$$\xi\zeta = -qR\frac{dR}{du},$$

$$\eta\zeta = +pR\frac{dR}{du}.$$

2° Si $p = 0$, $q = 0$, la rotation instantanée du trièdre a constamment lieu autour de l'axe du cercle, et, comme elle déplace le cercle sur lui-même, le mouvement élémentaire du cercle se réduit à une translation. Le plan du cercle se meut parallèlement à lui-même.

Les trois relations (2) donnent pour coordonnées du sommet du cône

$$X = -\frac{R}{\frac{dR}{du}}\xi,$$

$$Y = -\frac{R}{\frac{dR}{du}}\eta,$$

$$Z = -\frac{R}{\frac{dR}{du}}\zeta.$$

Ainsi *les seules surfaces cerclées telles que les plans tangents en tous les points d'une génératrice circulaire quelconque enveloppent un cône sont :*

1° *Les surfaces enveloppes de sphères;*

2° *Les surfaces engendrées par un cercle de rayon variable qui se déplace parallèlement à un plan fixe* (surfaces étudiées par M. Astor).

Pour obtenir le sommet du cône dans chaque position de la génératrice, on remarquera que, la variable u étant l'arc de trajectoire du centre du cercle, ξ, η, ζ sont les cosinus directeurs de la tangente à cette trajectoire. Dès lors, portons sur la tangente à la trajectoire du centre, dans le sens des arcs (u) décroissants, un

segment $\overline{OS}$ égal à $\frac{R}{\frac{dR}{du}}$; si l'on a affaire à une surface de M. Astor, le point S est le sommet du cône; si l'on a affaire à une enveloppe de sphères, le sommet du cône est la projection du point S sur l'axe du cercle.

THÉORÈME SUR LES FOYERS D'UNE COURBE QUELCONQUE;

PAR M. E. AMIGUES.

1. Je me propose d'énoncer, avec plus de précision, un théorème connu sur les foyers d'une courbe quelconque (*A treatise on the higher plane curves*, by G. SALMON). Je donnerai aussi une démonstration plus simple de ce théorème :

Si, de chacun des n foyers réels d'une courbe de classe n, on mène à cette courbe U_n *les* $(n-2)$ *tangentes non isotropes, on obtient un polygone de* $(n-2)$ *côtés. On peut toujours trouver une courbe* U_{n-2} *de classe* $(n-2)$ *tangente à tous les côtés de ce polygone. De même, cette courbe permet d'en construire une de classe* $(n-4)$. *Et ainsi de suite. Si l'on appelle* P_i *le produit des perpendiculaires abaissées des foyers réels de la courbe* U_i *sur une tangente quelconque à la courbe* U_n, *on a une relation linéaire entre les* P_i.

Nous prendrons a et b comme coordonnées tangentielles de la droite dont l'équation ponctuelle est

$$y - ax - b = 0.$$

Soit $f(a, b)$ un polynôme de degré $(n-2)$. Soient x_i, y_i les coordonnées d'un des foyers réels de la courbe.

L'équation

$$(1) \qquad \begin{cases} (y_1 - ax_1 - b)(y_2 - ax_2 - b)\ldots \\ \quad (y_n - ax_n - b) + (1 + a^2) f(a, b) = 0 \end{cases}$$

représente évidemment une courbe de classe n, ayant pour foyers les n points x_i, y_i, puisqu'elle admet les solutions

$$y_i - ax_i - b = 0,$$
$$a^2 + 1 = 0.$$

Si le polynôme f est arbitraire, l'équation (1) représente *toutes* les courbes de classe n ayant les points donnés pour foyers réels, vu que f contient le nombre de coefficients arbitraires qui est nécessaire.

Imaginons la courbe qui a pour équation

$$(2) \qquad f(a, b) = 0.$$

Si l'on désigne par U_n la courbe représentée par l'équation (1), l'équation (2) représente la courbe U_{n-2}. Car les tangentes menées des points x_i, y_i à la courbe U_n, abstraction faite des tangentes isotropes, sont données par les solutions du système

$$y_i - ax_i - b = 0,$$
$$f(a, b) = 0,$$

système qui donne aussi toutes les tangentes menées du point x_i, y_i à la courbe qui est représentée par l'équation

$$f(a, b) = 0.$$

Soient dès lors $(\alpha_1, \beta_1 (\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha_{n-2}, \beta_{n-2})$ les $(n - 2)$ foyers réels de cette nouvelle courbe. L'équation (2) pourra être remplacée par une équation analogue à (1), c'est-à-dire qu'on aura

$$f(a,b) \equiv \lambda_{n-2} [(\beta_1 - a\alpha_1 - b)(\beta_2 - a\alpha_2 - b)\ldots + (1 + a^2)\varphi(a, b)].$$

Continuant toujours de même, on aura pour équation de la courbe U_n

$$\prod_{i=1}^{i=n}(y_i - a x_i - b) + \lambda_{n-2}(a^2+1)\prod_{i=1}^{i=n-2}(\beta_i - a\alpha_i - b)$$
$$+ \lambda_{n-4}(a^2+1)^2\prod_{i=1}^{i=n-4}(\delta_i - a\gamma_i - b) + \ldots = 0.$$

Divisant toute l'équation par $(a^2+1)^{\frac{n}{2}}$, on obtient pour équation tangentielle de la courbe U_n l'équation

$$(3) \qquad P_n + \lambda_{n-2}P_{n-2} + \lambda_{n-4}P_{n-4} + \ldots = 0,$$

qui est l'expression du théorème énoncé.

2. Nous remarquerons immédiatement que, si l'on connaît la courbe U_{n-2} et les n foyers réels de la courbe U_n, on aura les n tangentes menées à la courbe U_n de chacun de ses foyers. On aura donc n^2 tangentes, qui définissent la courbe U_n toutes les fois que $n > 2$.

Une remarque plus importante est la suivante. Si n est pair, il peut arriver que l'équation (3) contienne un terme indépendant. La courbe U_2 est alors une conique. Mais, comme plusieurs des coefficients λ peuvent être nuls, le dernier terme peut être P_{n-2h}. De même pour n impair, le terme P_1 peut ne pas entrer dans l'équation et le dernier terme peut être P_{n-2h}.

Supposons qu'il en soit ainsi, n étant pair ou impair. Alors la courbe U_{n-2h} se réduit à $n-2h$ points, et ce sont ces points qui jouent le rôle de ses foyers réels.

Nous ferons encore une remarque relative au cas où l'équation (3) est binôme, c'est-à-dire de la forme

$$P_n + \lambda_{n-2h}P_{n-2h} = 0.$$

Dans une pareille courbe, le produit des distances des

n foyers réels à une tangente quelconque est dans un rapport constant avec le produit des distances de $n - 2h$ points fixes à cette même tangente.

Ces courbes ont la propriété suivante : *Si l'on joint à un point quelconque* M *de la courbe les n foyers réels et le $(n - 2h)$ points fixes, la somme des cotangentes des angles que les premières droites font avec la tangente en* M *égale à la somme des cotangentes des angles que les secondes droites font avec la même tangente.*

Si, en particulier, n est pair et que $2h = n$, on a des courbes telles que le produit des distances de leurs n foyers réels à une tangente variable soit constant. Dans ces courbes, la somme des cotangentes des angles qu'une tangente faite avec les rayons vecteurs des points de contact est nulle.

Cette propriété relative aux angles de la tangente et des rayons vecteurs qui donne de suite l'équation différentielle d'une pareille courbe a été énoncée et démontrée pour les courbes de troisième classe dans l'Ouvrage de M. Salmon. Dans le cas général, la démonstration est la même.

3. Enfin, nous allons appliquer l'équation (1) à la démonstration d'un théorème très intéressant dû à M. Paul Serret (*Comptes rendus*, 1876).

La somme des angles que fait une droite fixe avec les n tangentes menées d'un point fixe à une courbe de classe n diffère d'un multiple de π de la somme des angles formés par cette même droite fixe avec les droites qui joignent ce même point fixe aux n foyers réels.

Prenons ce point fixe pour origine et la direction fixe pour axe des x.

Si l'on fait $b = 0$ dans l'équation (1), on obtient une

équation en a qui admet pour racines les coefficients angulaires des tangentes menées de l'origine. Si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les angles de Ox avec ces tangentes, ces racines sont $\tang \alpha_1, \tang \alpha_2, \ldots, \tang \alpha_n$.

Posons

$$n\lambda = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

On a dès lors

$$\tang n\lambda = \frac{\Sigma \tang \alpha_1 - \Sigma \tang \alpha_1 \tang \alpha_2 \tang \alpha_3 + \ldots}{1 - \Sigma \tang \alpha_1 \tang \alpha_2 + \Sigma \tang \alpha_1 \tang \alpha_2 \tang \alpha_3 \tang \alpha_4 - \ldots}.$$

Ces diverses sommes seront données par l'équation en a, qui, si l'on pose

$$\frac{y_1}{x_1} = a_1 = \tang \beta_1, \qquad \frac{y_2}{x_2} = a_2 = \tang \beta_2, \qquad \ldots,$$

$$f(a, 0) \equiv A_0 a^{n-2} + A_1 a^{n-3} + \ldots + A_{n-2},$$

$$(-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n = \mu,$$

$$\Sigma_i = \Sigma a_1 a_2 \ldots a_i = \Sigma \tang \beta_1 \tang \beta_2 \ldots \tang \beta_i$$

devient

$$\begin{aligned}(\mu + A_0) a^n - (\mu \Sigma_1 - A_1) a^{n-1} + (\mu \Sigma_2 + A_2 + A_0)\\ \times a^{n-2} - (\mu \Sigma_3 - A_3 - A_1) a^{n-3}\\ + (\mu \Sigma_4 + A_4 + A_2) a^{n-4} - \ldots = 0.\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\tang n\lambda = \frac{\frac{\mu \Sigma_1 - A_1}{\mu + A_0} - \frac{\mu \Sigma_3 - A_3 - A_1}{\mu + A_0} + \frac{\mu \Sigma_5 - A_5 - A_3}{\mu + A_0} - \ldots}{1 - \frac{\mu \Sigma_2 + A_2 + A_0}{\mu + A_0} + \frac{\mu \Sigma_4 + A_4 + A_2}{\mu + A_0} - \ldots},$$

c'est-à-dire en supprimant les termes qui se détruisent et en divisant haut et bas par $\frac{\mu}{\mu + A_0}$,

$$\tang n\lambda = \frac{\Sigma_1 - \Sigma_3 + \Sigma_5 - \ldots}{1 - \Sigma_2 + \Sigma_4 - \ldots},$$

c'est-à-dire

$$\tang n\lambda = \tang(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n).$$

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons de Chimie, à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales, par *Henri Gautier*, ancien Élève de l'École Polytechnique, Professeur à l'École Monge et au Collège Sainte-Barbe, Professeur agrégé à l'École de Pharmacie, et *Georges Charpy*, ancien Élève de l'École Polytechnique, Professeur à l'École Monge. Grand in-8°, avec 83 figures; 1892. Prix : 9fr.

En lisant les *Leçons de Chimie* si modernes de MM. Gautier et Charpy, on éprouve une sorte de regret de n'avoir plus à les apprendre.

Les recueils de faits constituaient autrefois les livres de Chimie et leur donnaient l'aspect justifié de formulaires à réciter.

Les auteurs, en écrivant leurs « Leçons », n'ont pas cherché à compléter et rajeunir les livres connus, ils ont fait en matière d'enseignement une œuvre singulièrement personnelle où sont exposées les idées les plus récentes de la Science.

Dans cet Ouvrage les généralités occupent une place plus étendue qu'il n'est d'usage; elles systématisent les faits par avance, font de la Chimie une science déductive dans la mesure du possible et réduisent d'autant cet effort de mémoire qu'on lui reproche d'exiger.

Cette première Partie expose avec une clarté parfaite les questions d'analyses de gaz, de volume et de densité gazeuse, puis les éléments de Thermochimie et de Cristallographie. Un petit paragraphe nous a paru avoir pour les candidats un intérêt pratique spécial : c'est celui où sont réunis et dessinés les appareils usuels, convenables pour préparer, dessécher, liquéfier, analyser et mesurer tous les gaz indistinctement.

La deuxième Partie du Livre décrit la série classique des transformations des métalloïdes complètement expurgée des inutilités et mise au courant des dernières découvertes. C'est ainsi qu'on y trouve la série des composés hydrogénés de

l'azote $AzH^3Az^2H^4$, AzH^3AzH^3O et la théorie de l'acide sulfurique d'après Lunge.

Aux appareils traditionnels qui figurent dans bien des livres sont aussi substitués les appareils véritables dont l'industrie fait usage.

Pour la partie théorique les formules sont écrites simultanément dans la notation atomique qui est la langue chimique que parle le monde entier et le système des équivalents qui permet de lire les beaux Mémoires du passé.

Plus on vient tard dans la vie, plus on doit apprendre, mais aussi, on le voit par le livre de MM. Gautier et Charpy, plus cela devient facile.

A. ÉTARD,
Répétiteur de Chimie à l'École Polytechnique.

SUR LE CALCUL PAR APPROXIMATION DES RACINES DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES. MODIFICATION DE LA FORMULE DE NEWTON;

PAR M. ERNEST MALO.

M. Ch. Zenger a fait connaître, dans le tome XI du *Journal de Mathématiques et de Physique de Prague*, une méthode pour le calcul d'une racine d'une équation algébrique au moyen d'une première valeur approchée, qui présente beaucoup d'analogie avec celle de Newton, et qui, ce me semble, peut donner matière à des remarques intéressantes. Voici d'abord l'analyse de l'auteur telle qu'elle est résumée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XIII, p. 211.

Soient a la valeur approchée, α la valeur exacte de la racine, on pose d'une part $x = ay$, de l'autre $x = \alpha z$, de sorte que de l'équation

$$0 = f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m,$$

on tirera les deux suivantes

$$B_0 y^m + B_1 y^{m-1} + \ldots + B_m = 0,$$
$$C_0 z^m + C_1 z^{m-1} + \ldots + C_m = 0,$$

les coefficients étant respectivement

$$B_0 = A_0, \quad B_1 = A_1 a^{-1}, \quad \ldots, \quad B_i = A_i a^{-i}, \quad \ldots,$$
$$C_0 = A_0, \quad C_1 = A_1 \alpha^{-1}, \quad \ldots, \quad C_i = A_i \alpha^{-i}, \quad \ldots,$$

valeurs aisément calculables par logarithmes.

Comme d'ailleurs la deuxième équation doit être satisfaite pour $z = 1$, on a

$$C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_m = 0.$$

Si maintenant l'on remplace a par $a + da$ où da désigne $\alpha - a$, les valeurs B_0, B_1, ... B_i, ... deviennent C_0, C_1, ..., C_i, ..., de sorte que les accroissements dB_0, dB_1, dB_i, ... satisfont à la relation

$$B_0 + B_1 + dB_1 + B_2 + dB_2 + \ldots + B_m + dB_m = 0.$$

En mettant alors, au lieu des accroissements dB_i les différentielles tirées des relations

$$B_i = A_i a^{-i},$$

ou plutôt

$$\log B_i = \log A_i - i \log a,$$

il vient, écrivant ε au lieu de la somme $B_0 + B_1 + \ldots + B_m$,

$$da = \frac{a\varepsilon}{\varepsilon - B_0 + B_2 + 2B_3 + \ldots + (m-1)B_m}.$$

J'observerai maintenant, à l'égard de la formule de M. Zenger, qu'elle peut s'écrire ainsi qu'il suit, en désignant par h', au lieu de da, la correction à opérer sur la première valeur approchée a,

$$h' = -\frac{a f(a)}{a f'(a) - m f(a)},$$

et, pour l'établir à nouveau, je la rattacherai expressé-

ment à la formule de correction de Newton, dont manifestement elle ne diffère que par un terme du second ordre.

A cet effet, je considérerai l'équation $\Phi(x) = 0$, qui est la transformée aux inverses des racines de la proposée et qui, par suite, est fournie par la relation

$$\Phi(x) = x^m f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cela étant, et a désignant une valeur approchée d'une racine de l'équation $f(x) = 0$, $b = \frac{1}{a}$ sera une valeur approchée d'une racine de l'équation $\Phi(x) = 0$, dont on déduira une valeur plus approchée en adjoignant à b le terme correctif

$$k = -\frac{\Phi(b)}{\Phi'(b)}.$$

Il en résulte, réciproquement, une valeur plus approchée pour la racine considérée de l'équation $f(x) = 0$, savoir

$$\frac{1}{b+k} = \frac{1}{b} - \frac{k}{b^2},$$

en négligeant les termes du second ordre, ou encore

$$a - ka^2,$$

puisque $b = \frac{1}{a}$.

D'autre part, la différentiation de la relation

$$\Phi(x) = x^m f\left(\frac{1}{x}\right)$$

conduit à celle-ci

$$\Phi'(x) = mx^{m-1} f\left(\frac{1}{x}\right) - x^{m-2} f'\left(\frac{1}{x}\right),$$

et l'on en déduit, par la division membre à membre avec

la précédente,

$$\frac{\Phi(x)}{\Phi'(x)} = \frac{x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)}{mxf\left(\frac{1}{x}\right) - f'\left(\frac{1}{x}\right)};$$

donc, pour $x = b = \frac{1}{a}$,

$$k = -\frac{\Phi(b)}{\Phi'(b)} = \frac{f(a)}{a[af'(a) - mf(a)]},$$

de sorte que la valeur corrigée $a - ka^2$ devient

$$a - \frac{af(a)}{af'(a) - mf(a)},$$

et qu'en la représentant par $a + h'$ on a bien

$$h' = -\frac{af(a)}{af'(a) - mf(a)}.$$

Cette expression est très remarquable en ce sens qu'elle est, dans une large mesure indéterminée. Voici ce qu'il faut entendre par cette indétermination.

Considérant l'équation $f(x) = 0$, si l'on augmente ou diminue toutes les racines d'un même nombre ξ, on est conduit à une certaine transformée $F(x) = 0$. Or si a désigne toujours une valeur approchée d'une racine de $f(x)$, $a' = a + \xi$ sera aussi une valeur approchée d'une racine de $F(x)$, et les corrections à faire subir, d'après la méthode de Newton, aux valeurs approchées a et a' seront, respectivement,

$$-\frac{f(a)}{f'(a)} \quad \text{et} \quad -\frac{F(a')}{F'(a')};$$

mais, manifestement, $F(a') = f(a)$ et $F'(a') = f'(a)$, puisque les deux fonctions et les deux dérivées correspondent à un seul et même élément ponctuel ou tangentiel d'une courbe considérée seulement par rapport

à deux origines différentes, en sorte qu'on n'a point deux corrections différentes, mais une seule.

Il n'en est pas de même si l'on considère les corrections fournies par la formule donnée précédemment, car elles sont, d'une part,

$$-\frac{af(a)}{af'(a)-mf(a)},$$

et de l'autre,

$$-\frac{a'F(a')}{a'F'(a')-mF(a')};$$

or, en raison justement des égalités $F(a')=f(a)$, $F'(a')=f'(a)$, la seconde expression, qui se réduit à

$$-\frac{a'f(a)}{a'f'(a)-mf(a)},$$

ne peut pas coïncider avec la première. En définitive, il résulte de cette analyse que, a étant une valeur approchée d'une racine d'une équation $f(x)=0$, on en a une nouvelle valeur approchée, en adjoignant à a le terme de correction

$$h'=-\frac{\lambda f(a)}{\lambda f'(a)-mf(a)},$$

où λ est un nombre, non pas évidemment entièrement arbitraire, mais du moins susceptible de varier entre des limites fort étendues.

Lorsqu'on substitue à x, dans la fonction $f(x)$, la valeur fournie par la correction newtonienne

$$x=a+h,$$

on a

$$f(a+h)=\frac{h^2}{2}f''(a)+\ldots,$$

en sorte que si la valeur initiale a est suffisamment approchée, c'est-à-dire h assez petit, le signe du résultat est celui de $f''(a)$. Quel est le signe du résultat de la

substitution $a+h'$? En se bornant aux trois premiers termes du développement

$$f(a+h')=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\ldots,$$

on trouve

$$f(a+h')=\frac{\lambda f^2(a)[\lambda f''(a)-2mf'(a)]+2mf^3(a)}{2[\lambda f'(a)-mf(a)]},$$

où le dernier terme du numérateur est du troisième ordre et peut être négligé. Le signe est donc celui du produit

$$\lambda[\lambda f''(a)-2mf'(a)],$$

et la présence de l'indéterminée λ permet de le choisir à volonté. Ainsi en donnant à λ deux valeurs λ et λ_1 qui rendent la quantité entre crochets de signes contraires, on a deux corrections h' et h'_1, telles que la différence $h_1-h'_1$, prise en valeur absolue, mesure l'erreur commise et dont la moyenne $\frac{h'+h'_1}{2}$ pourra être adoptée pour servir de point de départ à de nouvelles corrections. On prendra garde à ne point choisir les quantités λ et λ_1 trop voisines l'une de l'autre, parce que, les corrections h' et h'_1 tendant alors à ne laisser subsister qu'une erreur du troisième ordre, on ne pourrait plus se rendre compte de la valeur exacte de cette erreur, encore qu'elle soit, d'une façon générale, aussi réduite que possible.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^3-7x+7=0,$$

considérée par Lagrange, on a, pour $a=-3$,

$$f=1,\qquad f'=20,\qquad f''=-18,$$

et les valeurs $\lambda=-6$, $\lambda_1=-7$ rendent respective-

ment négative et positive l'expression $\lambda f'' - 2mf'$.
Donc

$$h' = -\frac{6}{123} = -0,048780,$$

$$h'_1 = -\frac{7}{143} = -0,048951,$$

$$h - h'_1 = 0,000171, \qquad \frac{h' + h'_1}{2} = -0,048865;$$

ainsi l'erreur de h', de h'_1 et *a fortiori* de $\frac{h'+h'_1}{2}$ n'atteint pas 0,00017; la valeur exacte à six décimales de la racine cherchée étant

$$-3,048917,$$

les erreurs véritables sont, pour h',

$$-0,000137,$$

pour h'_1,

$$+0,000034,$$

enfin, pour $\frac{h'+h'_1}{2}$,

$$-0,000048.$$

Pour la correction newtonienne $h = -\frac{1}{20} = -0,05$, elle est de

$$0,001082.$$

Pour obtenir une deuxième approximation, on fera $a = -0,0489$ dans la transformée en $-3 + x$, c'est-à-dire dans

$$F(x) = x^3 - 9x^2 + 20x + 1.$$

On a alors

$$F = 0,00036218,$$
$$F' = 20,88737;$$

quant à la valeur de λ, on peut évidemment prendre,

comme ci-dessus, $\lambda = -7$. Il vient donc

$$h' = -\frac{0,00253526}{146,21268} = -0,000017339538,$$

nombre dont toutes les décimales peuvent être considérées comme exactes, de sorte que la valeur de la racine est

$$-3,048917339538.$$

On peut évidemment donner une infinité d'expressions du terme de correction à joindre à une valeur approchée d'une racine d'une équation numérique, expressions se rattachant à celles de Newton et en résultant par l'application de sa méthode à une transformée quelconque de la proposée, ou par une altération directe infiniment petite des deux termes de la correction newtonienne. Comme vraisemblablement aucune de ces expressions ne présente, au même degré que celle qui vient d'être établie, le caractère de simplicité et de commodité désirables en cette matière, j'en examinerai une seulement.

Si l'on pose

$$\Phi(x) = (-1)^m f(\sqrt{x}) f(-\sqrt{x}),$$

$\Phi(x) = 0$ est la transformée aux carrés des racines de l'équation $f(x) = 0$, et, par suite, a étant une valeur approchée d'une racine de celle-ci, $b = a^2$, est une valeur approchée d'une racine de $\Phi(x) = 0$. Appliquant à cette valeur b la correction newtonienne $k = -\frac{\Phi(b)}{\Phi'(b)}$, on en déduit réciproquement une nouvelle valeur approchée de la racine de $f(x)$, savoir

$$\sqrt{b+k} = \sqrt{b} + \frac{k}{2\sqrt{b}},$$

aux termes près du second ordre. Du reste, en différentiant l'égalité qui définit $\Phi(x)$, on en tire celle-ci

$$\Phi'(x) = \frac{(-1)^m}{2\sqrt{x}}[f(-\sqrt{x})f'(\sqrt{x}) - f(\sqrt{x})f'(-\sqrt{x})]$$

et, par division,

$$\frac{\Phi(x)}{\Phi'(x)} = 2\sqrt{x}\,\frac{f(\sqrt{x})f(-\sqrt{x})}{f(-\sqrt{x})f'(\sqrt{x}) - f(\sqrt{x})f'(-\sqrt{x})}.$$

Il vient donc, pour $x = b = a^2$,

$$-k = \frac{\Phi(b)}{\Phi'(b)} = 2a\,\frac{f(a)f(-a)}{f(-a)f'(a) - f(a)f'(-a)},$$

de sorte que la nouvelle valeur approchée de la racine de $f(x)$, c'est-à-dire

$$\sqrt{b} + \frac{k}{2\sqrt{b}} = a + \frac{k}{2a},$$

peut s'écrire

$$a + h',$$

h' ayant la valeur

$$-\frac{f(a)f(-a)}{f(-a)f'(a) - f(a)f'(-a)},$$

qu'on peut écrire encore

$$-\frac{f(a)}{f'(a) - f(a)\dfrac{f'(-a)}{f(-a)}}.$$

Ici, comme précédemment, si l'on fait un changement d'origine, les valeurs de $f(a)$ et de $f'(a)$ ne seront pas altérées, tandis que celles de $f(-a)$ et de $f'(-a)$ changeront avec l'origine. L'expression de h' peut donc être écrite d'une façon générale sous la forme

$$-\frac{f(a)}{f'(a) - f(a)\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}},$$

où ξ a une valeur quelconque. Si l'on considère que $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}$ peut prendre, pour m valeurs de ξ une valeur $\left(\frac{m}{\lambda}\right)$ assignée d'avance, on retombe purement et simplement sur la forme déjà considérée. Et si l'on se propose d'utiliser la forme spéciale sous laquelle s'est présentée ici le paramètre indéterminé $\left(\frac{m}{\lambda}\right)$, on trouve que la question se complique sans aucune compensation du côté de la précision, car la variation de $\left(\frac{m}{\lambda}\right)$ est généralement très grande par rapport à celle de ξ.

Il y a donc lieu de se borner à l'expression

$$h' = -\frac{\lambda f(a)}{\lambda f'(a) - m f(a)},$$

où l'on prendra successivement pour $m\lambda^{-1}$ les deux nombres entiers consécutifs entre lesquels tombe la racine de l'équation

$$\frac{\lambda}{2} f''(a) - m f'(a) = 0.$$

On aura alors l'avantage d'avoir un terme de correction sensiblement aussi simple que celui de Newton, et dont l'erreur, réduite autant qu'il est possible, n'exige point pour être estimée l'emploi simultané de la méthode des parties proportionnelles.

ERRATA AUX TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRÖN.

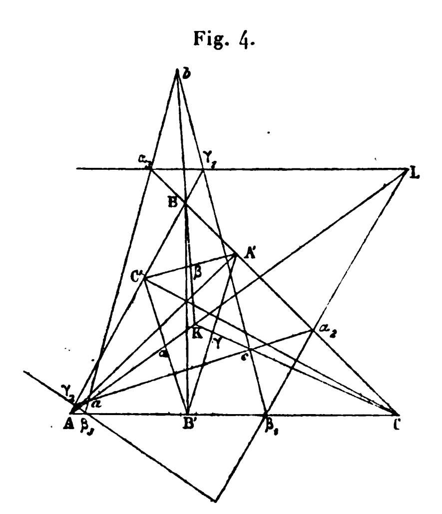
Page 172, ligne 12 (log 93117), *au lieu de* 0290, *lisez* *0290.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE (¹);

PAR M. MOLENBROCH.

Démonstration géométrique (*fig.* 4). — Soient A′B′C′ le triangle orthocentrique de ABC, K le point de Lemoine. Si *ab*, *bc* sont parallèles à A′B′, B′C′, il faut

Fig. 4.



d'abord démontrer que la droite joignant les points *a* et *c* est parallèle à A′C′. Les points d'intersection des côtés des triangles *abc*, ABC sont désignés, comme dans la *fig.* 1, par α_2, α_3, β_3, β_1, γ_1, γ_2.

Les perpendiculaires abaissées du point *b* sur BC, AB sont proportionnelles à *a*, *c*. Les angles $b\gamma_1$A,

(¹) *Voir* même Tome, p. 121.

$b\alpha_3 C$ étant les suppléments de C, A, on aura

$$\gamma_1 b : \alpha_3 b = \frac{c}{\sin C} : \frac{a}{\sin A},$$

par conséquent

$$\gamma_1 b = \alpha_3 b.$$

Or, comme

$$\angle b\beta_3\beta_1 = \angle b\beta_1\beta_3 = \angle B,$$

on aura

$$b\beta_3 = b\beta_1.$$

On peut en conclure

$$\gamma_1\alpha_3 \parallel AC.$$

Si α, β, γ sont les milieux de $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, on aura

$$\beta\alpha \parallel A'B' \parallel ab \quad \text{et} \quad \beta\gamma \parallel B'C' \parallel bc,$$

par conséquent

$$\frac{Ka}{K\alpha} = \frac{Kb}{K\beta} = \frac{Kc}{K\gamma} \qquad \text{ou} \qquad ac \parallel \alpha\gamma \parallel A'C'.$$

En outre, $\alpha_2\beta_1$ est parallèle à AB. En prolongeant $\gamma_1\alpha_3$, $\alpha_2\beta_1$ on obtient un parallélogramme $A\gamma_1 L\beta_1$ dont $\beta_1\gamma_1$ est une diagonale. Puisque $\beta_1\gamma_1 \parallel B'C'$ et puisque AK divise la droite $B'C'$ en deux parties égales, il s'ensuit que AK passera par le milieu de $\beta_1\gamma_1$, c'est-à-dire que AK est la seconde diagonale du parallélogramme $A\gamma_1 L\beta_1$. AK devra donc passer par L. Les trois droites $\gamma_1\alpha_3$, $\alpha_2\beta_1$, $\beta_3\gamma_2$ prolongées seront ainsi les côtés d'un triangle homologique à ABC, K étant le centre d'homologie. Selon le théorème de M. Lemoine, il faut que ces trois droites rencontrent les côtés du triangle ABC en six points concycliques.

3° $\varphi_1 = \frac{\pi - A}{2}$, $\varphi_2 = \frac{\pi - B}{2}$, $\varphi_3 = \frac{\pi - C}{2}$, ce qui veut dire que les directions λ, μ, ν sont les bissectrices des

angles extérieurs du triangle ABC. On trouve alors

$$\frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} = \cos^2\frac{A}{2} : \cos^2\frac{B}{2} : \cos^2\frac{C}{2},$$

$$y_1 : y_2 : y_3 = \frac{1}{a(s-a)} : \frac{1}{b(s-b)} : \frac{1}{c(s-c)}.$$

Le centre d'homologie coïncide donc avec le point de concours des trois droites joignant les sommets du triangle ABC aux points de contact des côtés opposés du triangle avec le cercle inscrit. D'où ce théorème :

Si l'on trace un triangle abc homologique au triangle donné ABC, *le point de concours des trois droites joignant les sommets* A, B, C *aux points où les côtés* BC, CA, AB *touchent le cercle inscrit étant le centre d'homologie et les côtés de abc étant parallèles aux bissectrices des angles extérieurs de* ABC, *les six points d'intersection des côtés non homologues des deux triangles seront concycliques.*

Démonstration géométrique (*fig.* 5). — Soient A′, B′, C′ les points de contact sur les droites BC, CA, AB mentionnées dans l'énoncé de la proposition, O le centre d'homologie, c'est-à-dire le point de concours des droites AA′, BB′, CC′; soient $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ les bissectrices des angles extérieurs du triangle ABC. Nous voulons démontrer d'abord que, *ca*, *ab* étant parallèles à $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, *bc* doit être parallèle à $\beta\gamma$.

Traçons C′A′, A′B′, B′C′ et joignons A, B, C au centre I du cercle inscrit au triangle ABC. On aura, comme $ca \perp BI$ et $C'A' \perp BI$, $ca \parallel C'A'$. De même $ab \parallel A'B'$, d'où il suit

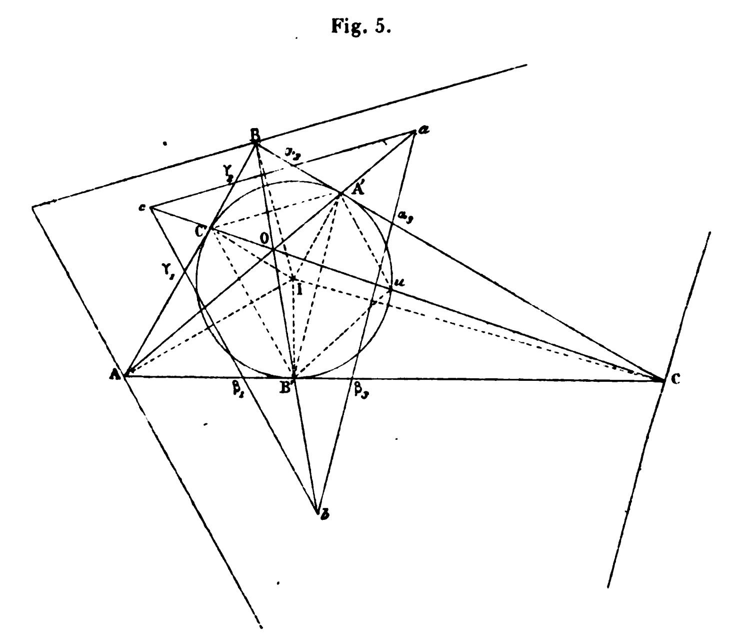
$$\frac{Oc}{OC'} = \frac{Oa}{OA'} = \frac{Ob}{OB'},$$

c'est-à-dire

$$cb \parallel C'B'.$$

Puisque BI, AI sont perpendiculaires à $\gamma_2\alpha_2$, $\beta_1\gamma_1$ aux milieux de ces droites, il faudra que le point I soit

Fig. 5.



le centre du cercle passant par les six points α_2, α_3, β_3, β_1, γ_1, γ_2. Il reste à démontrer que $I\gamma_1 = I\gamma_2$ ou bien, comme $IC' \perp AB$, $\gamma_2 C' = \gamma_1 C'$.

Soit U le point d'intersection de CC' avec le cercle inscrit. On aura

$$<\gamma_2 c C' = <UC'A' \quad \text{et} \quad <c\gamma_2 C' <= \gamma_2 C'A' = <A'UC',$$

c'est-à-dire

$$\Delta e\gamma_2 C' \backsim \Delta C'A'U,$$

d'où il suit

$$\gamma_2 C' : cC' = A'U : A'C'.$$

De même on aura

$$\Delta C'\gamma_1 c \backsim \Delta C'B'U,$$

d'où

$$\gamma_1 C' : cC' = B'U : B'C'.$$

Enfin, comme les triangles A'UC, B'UC sont semblables à A'C'C, B'C'C, on obtient

$$A'U : A'C' = A'C : CC' = B'C : CC' = B'U : B'C',$$

d'où l'on peut conclure que l'équation $\gamma_1 C' = \gamma_2 C'$ a lieu.

4° $\varphi_1 = -\frac{A}{2}$, $\varphi_2 = -\frac{B}{2}$, $\varphi_3 = \frac{\pi - C}{2}$, ce qui signifie que les directions λ, μ sont les bissectrices des angles A, B et que ν est la bissectrice de l'angle extérieur à C du triangle ABC. On trouvera maintenant

$$y_1 : y_2 : y_3 = a(s-b) : b(s-a) : -cs.$$

Le centre d'homologie coïncide donc avec le point de concours des droites joignant les sommets du triangle aux points de contact des côtés avec le cercle exinscrit au côté c du triangle ABC. On obtient ainsi un théorème analogue au précédent.

5° $\varphi_1 = -A$, $\varphi_2 = -B$, $\varphi_3 = -C$, c'est-à-dire $\lambda = \mu = \nu = 0$. — D'après les formules générales, y_1, y_2, y_3 ne sont pas déterminés. Si l'on retourne aux formules (20) on trouve

$$cd_2 - bd_3 = \frac{b}{y_3}, \qquad ad_3 - cd_1 = \frac{c}{y_1}, \qquad bd_1 - ad_2 = \frac{a}{y_2},$$

valeurs qui satisfont toutefois à la condition (29). Il en résulte la relation

$$\frac{1}{ay_1} + \frac{1}{by_2} + \frac{1}{cy_3} = 0,$$

qui prouve que le centre d'homologie doit appartenir à la conique polaire du centre de gravité du triangle ABC par rapport à ce triangle. Tout point de cette conique pourra servir de centre d'homologie.

Nous voulons encore examiner quelques hypothèses plus générales et d'abord traiter le cas où les directions λ, μ, ν sont concourantes, c'est-à-dire où les équations (23) et (24) sont satisfaites.

Le premier mode de résolution des équations (20) et (29) ne peut pas servir maintenant; le second subsiste, excepté dans le cas où une des quantités λ^2, μ^2, ν^2 est égale à l'unité. Si nous excluons cette dernière supposition nous aurons les relations (23), (24) et (36), savoir

$$(53)\qquad \begin{gathered} 1+\lambda\mu\nu=0, \\ p_1-\nu p_2+\nu\lambda p_3=0, \\ a(\lambda-\mu\nu)+b(\mu-\nu\lambda)+c(\nu-\lambda\mu)=0, \end{gathered}$$

auxquelles se joint encore, d'après (40), cette nouvelle formule

$$(54)\qquad p_3-\lambda p_2+\nu\lambda p_3=0.$$

Appelons S le point de concours des directions λ, μ, ν et soient x_1, x_3, x_3 les coordonnées de ce point S. On aura

$$\lambda=-\frac{x_2}{x_3},\qquad \mu=-\frac{x_3}{x_1},\qquad \nu=-\frac{x_1}{x_2}.$$

Ces coordonnées satisferont aux trois équations

$$(55)\qquad ax_1(x_2^2+x_3^2)+bx_2(x_3^2+x_1^2)+cx_3(x_1^2+x_2^2)=0,$$

$$(56)\qquad \left\{\begin{aligned} p_1x_2x_3+p_2x_3x_1+p_3x_1x_2=0, \\ p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3=0. \end{aligned}\right.$$

D'après l'équation (55) le lieu du point S est une courbe du troisième degré passant par les sommets du triangle.

En éliminant entre (55) et (56) x_1, x_2, x_3, on obtient le lieu du point $p_1 : p_2 : p_3$. Des équations (56)

on déduit facilement

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2 \pm \sqrt{P}}{2 p_1 p_2},$$

si pour abréger on a posé

$$P = p_1^4 + p_2^4 + p_3^4 - 2p_2^2 p_3^2 - 2p_3^2 p_1^2 - 2p_1^2 p_2^2.$$

Par conséquent

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2 \mp \sqrt{P}}{2 p_1 p_2} \quad \text{et} \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2}{p_1 p_2}.$$

Remarquons encore que l'équation (55) peut être mise sous la forme

$$a\left(\frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_2}\right) + b\left(\frac{x_3}{x_1} + \frac{x_1}{x_3}\right) + c\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) = 0.$$

On voit immédiatement que l'équation du lieu du point P sera

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} & a p_1 (p_2^2 + p_3^2 - p_1^2) + b p_2 (p_3^2 + p_1^2 - p_2^2) \\ & \qquad + c p_3 (p_1^2 + p_2^2 - p_3^2) = 0, \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire une courbe du troisième degré. En portant dans cette équation les valeurs de p_1, p_2, p_3 données par (31), on trouvera aussi le lieu du centre d'homologie O. C'est une courbe du sixième degré dont l'équation est assez compliquée.

La construction générale peut servir à trouver le centre d'homologie, les directions λ, μ, ν étant données. Les équations (53) et (54) nous permettent d'arriver à une autre construction et de résoudre en même temps le problème de déterminer λ, μ, ν en regardant y_1, y_2, y_3 comme données.

Remarquons d'abord que, d'après ce qui précède, il est toujours possible de construire le point O ou y_1, y_2, y_3, connaissant le point P ou p_1, p_2, p_3 et inversement.

Les équations (56) montrent que le point S est un des points d'intersection de la conique polaire du point P par rapport au triangle ABC et de la droite polaire du point P' conjugué isogonal de P. La droite polaire d'un point s'obtient par une construction assez connue. Afin de construire la conique polaire de P, il suffira de remarquer qu'elle passe par les sommets du triangle ABC et que les équations des tangentes en ces points sont

$$p_2 x_3 + p_3 x_2 = 0, \qquad p_3 x_1 + p_1 x_3 = 0, \qquad p_1 x_2 + p_2 x_1 = 0.$$

Or, comme l'équation de la polaire du point P est

$$\frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3} = 0,$$

il suit que ces tangentes sont les droites joignant les sommets A, B, C aux points d'intersection de la droite polaire de P avec les côtés du triangle ABC.

A chaque centre d'homologie il ne correspond, par conséquent, que deux systèmes de valeurs de λ, μ, ν.

Si, au contraire, λ, μ, ν ou le point $S(x_1, x_2, x_3)$ sont donnés, le point P dont les coordonnées sont proportionnelles à p_1, p_2, p_3 se trouve facilement de la manière suivante. D'après (56) ce point P est le point d'intersection des droites polaires par rapport au triangle ABC des deux points

$$x_1 : x_2 : x_3 \text{ ou S} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3}.$$

Le second point est le conjugué isogonal du point S par rapport au triangle ABC.

Il ne nous reste à considérer que le cas où les deux équations

$$1 + \lambda\mu\nu = 0, \qquad \lambda = \pm 1$$

où

$$\lambda = \pm 1, \qquad \mu\nu = \mp 1$$

sont satisfaites à la fois, puisque alors nous ne pouvons nous servir d'aucune des méthodes exposées antérieurement pour résoudre le système d'équations (20) et (29).

Si, dans ce cas, nous retournons à ces équations, on a, au lieu de la relation (37) et de la première des équations (20),

$$ad_3 - cd_1 + \frac{a}{y_3} = \mp\left(bd_1 - ad_2 - \frac{a}{y_2}\right),$$

$$ad_3 - cd_1 - \frac{c}{y_1} = \mp\left(bd_1 - ad_2 + \frac{b}{y_1}\right),$$

d'où, en retranchant,

$$(58)\qquad \frac{a}{y_3} + \frac{c}{y_1} = \pm\left(\frac{a}{y_2} + \frac{b}{y_1}\right) \qquad \text{ou} \qquad p_2 = \pm p_3.$$

Du système d'équations (38) les valeurs de $ad_3 - cd_1$, $bd_1 - ad_2$ contenant la quantité λ disparaissent; du système (39), la première équation seulement perd sa vigueur, tandis que la première équation du système (40) continue à subsister, d'où l'on déduit facilement

$$\mu^2 p_1 = \frac{p_1}{\mu^2},$$

c'est-à-dire

$$p_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mu^2 = 1.$$

Supposons d'abord

$$(59)\qquad p_1 = 0.$$

Des équations (38), (39), on pourra encore déduire

$$\frac{1}{\nu^2 - 1}\left[\nu\left(\frac{b}{y_3} + \frac{c}{y_2}\right) - \frac{c}{y_1} - \nu^2\frac{a}{y_3}\right] = \frac{ca}{\mu^2 - 1}(a - c\mu)(p_1 - \mu p_3),$$

$$\frac{1}{\mu^2 - 1}\left[\mu\left(\frac{b}{y_3} + \frac{c}{y_2}\right) - \frac{a}{y_2} - \mu^2\frac{b}{y_1}\right] = \frac{ab}{\nu^2 - 1}(b - a\nu)(p_2 - \nu p_1).$$

En ayant égard à l'équation (59) et en remplaçant μ par $\mp \frac{1}{\nu}$, ces dernières équations se réduisent à

$$(60) \qquad \frac{1}{ay_1} + \frac{\nu^2}{cy_3} = (a\nu \pm c)p_2.$$

Les relations (58), (59) nous permettent de déterminer y_1, y_2, y_3. La formule (60) nous fera connaître ensuite la valeur de ν. On trouve,

$$\frac{ay_1}{c \mp b} = \frac{by_2}{c \mp b} = \frac{-cy_3}{c - b}$$

et

$$\nu^2 - \frac{\mp 2a}{c \mp b}\nu + 1 = 0.$$

Si l'on prend la quantité $-2a : (c + b)$ comme coefficient de ν, le discriminant de l'équation devient négatif. On ne trouve ainsi finalement que les valeurs

$$\frac{ay_1}{c - b} = \frac{by_2}{c + b} = \frac{-cy_3}{c + b}, \qquad \nu = \frac{1}{b - c}\left(a \pm 2\sqrt{bc}\sin\frac{A}{2}\right).$$

Le centre d'homologie et le point S ne sont donc pas des points remarquables du triangle. Voici une construction du centre d'homologie :

Par le point A traçons une parallèle PQ à BC. Prenons sur AC un segment AE = AB. Si la bissectrice de l'angle A coupe BE en G, par ce point menons une droite GF parallèle à BC qui coupe le côté AC en F. La droite BF rencontre PQ en O.

Supposons ensuite $\mu^2 = 1$. On pourra maintenant distinguer les deux cas :

1° $\lambda = -\mu = \nu = 1$. D'après ce qui précède, on arrivera facilement aux relations

$$p_2 = p_3, \qquad p_3 = -p_1, \qquad p_1 = p_2,$$

qui ne sont satisfaites à la fois que par $p_1 = p_2 = p_3 = 0$,

c'est-à-dire par des valeurs infiniment grandes de y_1, y_2, y_3.

2° $\lambda = \mu = \nu = -1$. On arrivera encore au même résultat.

Examinons enfin les centres des cercles passant par les six points d'intersection des côtés non homologues des triangles *abc*, ABC et retournons, à cet effet, aux formules générales.

Comme la polaire du centre de la conique, par rapport à cette courbe, est la droite à l'infini (18), on trouve immédiatement, en désignant les coordonnées du centre par x_1, x_2, x_3, que ces quantités satisfont aux équations

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a}\left[C\,d_1+(C+R)\left(d_1+\frac{1}{y_1}\right)-\frac{x_1}{y_1^2}\right]\\ &=\frac{1}{b}\left[C\,d_2+(C+R)\left(d_2+\frac{1}{y_2}\right)-\frac{x_2}{y_2^2}\right]\\ &=\frac{1}{c}\left[C\,d_3+(C+R)\left(d_3+\frac{1}{y_3}\right)-\frac{x_3}{y_3^2}\right].\end{aligned}\right.$$

De la première de ces formules, on conclut facilement la suivante

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} &C\left[2(b\,d_1-a\,d_2)+\frac{b}{y_1}-\frac{a}{y_2}\right]\\ &+R\left(b\,d_1-a\,d_2+\frac{b}{y_1}-\frac{a}{y_2}\right)=\frac{b x_1}{y_1^2}-\frac{a x_2}{y_2^2}.\end{aligned}\right.$$

Remplaçons dans cette équation R et $bd_1 - ad_2$ par leurs valeurs données par les équations (12), (21). On arrive ainsi à l'équation (63)

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} &C\left[(1-\lambda\mu\nu)\left(\frac{a}{y_2}+\frac{b}{y_1}\right)-2\mu\left(\frac{b}{y_3}+\frac{c}{y_2}\right)+2\mu\nu\left(\frac{c}{y_1}+\frac{a}{y_3}\right)\right]\\ &=\mu\frac{x_1}{y_1}\left[\frac{b}{y_3}+\frac{c}{y_2}-\nu\left(\frac{c}{y_1}+\frac{a}{y_3}\right)+\nu\lambda\left(\frac{a}{y_2}+\frac{b}{y_1}\right)\right]\\ &+\frac{x_2}{y_1}\left[-\left(\frac{a}{y_3}+\frac{b}{y_1}\right)+\mu\left(\frac{b}{y_3}+\frac{c}{y_2}\right)-\mu\nu\left(\frac{c}{y_1}+\frac{a}{y_3}\right)\right]\\ &+\frac{x_3}{y_3}\left[-\frac{b}{y_1}+\lambda\mu\nu\frac{a}{y_2}+\mu\left(\frac{c}{y_2}+\frac{b}{y_3}\right)-\mu\nu\left(\frac{a}{y_3}+\frac{c}{y_1}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

En appliquant les équations (31), on trouve

$$(1-\lambda\mu\nu)\left(\frac{a}{y_2}+\frac{c}{y_1}\right)-2\mu\left(\frac{b}{y_3}+\frac{c}{y_2}\right)+2\mu\nu\left(\frac{c}{y_1}+\frac{a}{y_3}\right)$$
$$=abc[(1-\lambda\mu\nu)p_3-2\mu p_1+2\mu\nu p_2]$$
$$=abc[p_3-\mu p_1+\mu\nu p_2-\mu(p_1+\nu p_2+\nu\lambda p_3)],$$
$$-\frac{b}{y_1}+\lambda\mu\nu\frac{a}{y_2}+\mu\left(\frac{c}{y_2}+\frac{b}{y_3}\right)-\mu\nu\left(\frac{a}{y_3}+\frac{c}{y_1}\right)$$
$$=\frac{ab}{2}[ap_1-bp_2-cp_3+\lambda\mu\nu(ap_1-bp_2+cp_3)+2\mu cp_1-2\mu\nu cp_2]$$
$$=ab\left[-\frac{1-\lambda\mu\nu}{2}(ap_1+bp_2+cp_3)+ap_1-bp_2\lambda\mu\nu+\mu cp_1-\mu\nu cp_2\right]$$
$$=ab[-a(p_1-p_2\nu+p_3\nu\lambda)+b\lambda(p_3-\mu p_1+\mu\nu p_2)].$$

Le dernier résultat a été obtenu à l'aide de la formule (33). La substitution de ces valeurs dans l'équation (63), en ayant égard aux équations (34), réduit celle-là à la suivante

$$(64)\quad\begin{cases}\lambda\mu\dfrac{x_1}{y_1}-\nu\dfrac{x_2}{y_2}+\lambda\dfrac{a-b\nu}{c}\dfrac{x_3}{y_3}=(\nu-\lambda\mu)C.\\ \text{De même}\\ \mu\dfrac{b-c\lambda}{a}\dfrac{x_1}{y_1}+\mu\nu\dfrac{x_2}{y_2}-\lambda\dfrac{x_3}{y_3}=(\lambda-\mu\nu)C.\\ -\mu\dfrac{x_1}{y_1}+\nu\dfrac{c-a\mu}{b}\dfrac{x_2}{y_2}+\nu\lambda\dfrac{x_3}{y_3}=(\mu-\nu\lambda)C.\end{cases}$$

La multiplication de ces équations par c, a, b et l'addition des produits fournit une identité. Des deux premières, on peut tirer les rapports

$$(65)\quad\begin{cases}x_1:x_2:x_3=\left(\dfrac{a\mu-c-b\mu\nu}{\mu bcy_2y_3}-d_3\dfrac{1-\mu^2}{\mu by_2}+d_2\dfrac{1-\nu^2}{\nu cy_3}\right)\\ \quad:\left(\dfrac{b\nu-a-c\nu\lambda}{\nu cay_3y_1}-d_1\dfrac{1-\nu^2}{\nu cy_3}+d_3\dfrac{1-\lambda^2}{\lambda ay_1}\right)\\ \quad:\left(\dfrac{c\lambda-b-a\lambda\mu}{\lambda aby_1y_2}-d_2\dfrac{1-\lambda^2}{\lambda ay_1}+d_1\dfrac{1-\mu^2}{\mu by_2}\right).\end{cases}$$

Dans ces valeurs, on pourra substituer les quantités d_1, d_2, d_3 données par (42), d'où l'on voit que les coordonnées x_1, x_2, x_3 sont proportionnelles à des fonctions

linéaires de la variable u. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Tous les cercles correspondant à un seul système de directions λ, μ, ν *ont leurs centres en ligne droite.*

L'équation de cette droite, que nous appellerons, dans ce qui suit, simplement *la droite des centres,* s'obtient en éliminant u entre les valeurs de x_1, x_2, x_3 mentionnées ci-dessus. D'une manière plus simple, on parvient au même résultat en éliminant la quantité C entre les équations (64) :

Multiplions la seconde équation par $\mu - \nu\lambda$, la troisième par $\lambda - \mu\nu$ et retranchons le second produit du premier. On trouvera

$$(66)\qquad x_1\frac{1-\lambda^2}{\lambda a y_1}+x_2\frac{1-\mu^2}{\mu b y_2}+x_3\frac{1-\nu^2}{\nu c y_3}=0,$$

ou, d'après (43),

$$(67)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1(1-\lambda^2)(b\nu+c\mu-a)+x_2(1-\mu^2)(c\lambda+a\nu-b)&\\ +x_3(1-\nu^2)(a\mu+b\lambda-c)=0&: \end{aligned}\right.$$

enfin, en introduisant les angles φ_1, φ_2, φ_3.

$$(68)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1\sin(A+2\varphi_1)+x_2\sin(B+2\varphi_2)&\\ +x_3\sin(C+2\varphi_3)=0.& \end{aligned}\right.$$

L'équation (67) est satisfaite par les valeurs

$$x_1:x_2:x_3=\frac{\mu^2-\nu^2}{b\nu+c\mu-a}:\frac{\nu^2-\lambda^2}{c\lambda+a\nu-b}:\frac{\lambda^2-\mu^2}{a\mu+b\lambda-c},$$

$$x_1:x_2:x_3=p_1:p_2:p_3=(\lambda+\mu\nu):(\mu+\nu\lambda):(\nu+\lambda\mu),$$

$$\begin{aligned} x_1:x_2:x_3=&\frac{1}{b\nu+c\mu-a}\left[\frac{b(1-\nu^2)}{c\lambda+a\nu-b}-\frac{c(1-\mu^2)}{a\mu+b\lambda-c}\right]\\ &:\frac{1}{c\lambda+a\nu-b}\left[\frac{c(1-\lambda^2)}{a\mu+b\lambda-c}-\frac{a(1-\nu^2)}{b\nu+c\mu-a}\right]\\ &:\frac{1}{a\mu+b\lambda-c}\left[\frac{a(1-\mu^2)}{b\nu+c\mu-a}-\frac{b(1-\lambda^2)}{c\lambda+a\nu-b}\right], \end{aligned}$$

dont les dernières désignent le point à l'infini de la droite des centres. Chaque point de cette droite peut donc être représenté par

$$(69)\quad \left\{\begin{aligned} & x_1 : x_2 : x_3 \\ & \quad = \frac{1}{b\nu + c\mu - a}\left[h(\mu^2 - \nu^2) + \frac{b(1-\lambda^2)}{c\lambda + a\nu - b} - \frac{c(1-\mu^2)}{a\mu + b\lambda - c}\right] \\ & \quad : \frac{1}{c\lambda + a\nu - b}\left[h(\nu^2 - \lambda^2) + \frac{c(1-\lambda^2)}{a\mu + b\lambda - c} - \frac{a(1-\nu^2)}{b\nu + c\mu - a}\right] \\ & \quad : \frac{1}{a\mu + b\lambda - c}\left[h(\lambda^2 - \mu^2) + \frac{a(1-\mu^2)}{b\nu + c\mu - a} - \frac{b(1-\lambda^2)}{c\lambda + a\nu - b}\right] \end{aligned}\right.$$

où h est une variable quelconque.

Il en résulte que la droite des centres ne dégénérera en un seul point, que si l'on a :

1°

$$\lambda^2 = \mu^2 = \nu^2,$$

c'est-à-dire

$$\lambda = \mu = \nu = 1 \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \mu = -\nu = -1,$$

si nous excluons les valeurs

$$\lambda = \mu = \nu.$$

Nous arrivons ainsi à des cas précédemment considérés.

2°

$$\frac{(1-\lambda^2)(b\nu + c\mu - a)}{a} = \frac{(1-\mu^2)(c\lambda + a\nu - b)}{b} = \frac{(1-\nu^2)(a\mu + b\lambda - c)}{c}$$

où, en introduisant φ_1, φ_2, φ_3,

$$\begin{aligned} & \sin(A + 2\varphi_1) : \sin(B + 2\varphi_2) : \sin(C + 2\varphi_3) \\ & \quad = \sin A : \sin B : \sin C. \end{aligned}$$

Les solutions de ces équations sont

$$\varphi_1 = \frac{2m_1 + 1}{2}\pi \qquad \text{ou} \qquad \varphi_1 = k_1\pi - A,$$

$$\varphi_2 = \frac{2m_2 + 1}{2}\pi \qquad \text{ou} \qquad \varphi_2 = k_2\pi - B, \qquad \ldots,$$

où m_1, m_2, ..., k_1, k_2, ... sont entiers. Ce n'est que le premier cas que nous poursuivons. On trouve que le centre d'homologie coïncide alors avec l'orthocentre du triangle ABC, et les sommets du triangle *abc* seront à l'infini.

A la supposition que nous venons de faire il ne correspond donc aucun triangle réel.

3°

$$\begin{aligned}&\left[\frac{b(1-\nu^2)}{c\lambda+a\nu-b}-\frac{c(1-\mu^2)}{a\mu+b\lambda-c}\right]\\ &\quad:\left[\frac{c(1-\lambda^2)}{a\mu+b\lambda-c}-\frac{a(1-\nu^2)}{b\nu+c\mu-a}\right]\\ &\quad:\left[\frac{a(1-\mu^2)}{b\nu+c\mu-a}-\frac{b(1-\lambda^2)}{c\lambda+a\nu-b}\right]\\ &= (\mu^2-\nu^2):(\nu^2-\lambda^2):(\lambda^2-\mu^2).\end{aligned}$$

En transformant l'une quelconque de ces équations, on obtiendra

$$(70)\quad \frac{a(\mu^2-\nu^2)}{b\nu+c\mu-a}+\frac{b(\nu^2-\lambda^2)}{c\lambda+a\nu-b}+\frac{c(\lambda^2+\mu^2)}{a\mu+b\lambda-c}=0.$$

Les coordonnées du centre de la série des cercles correspondant à un système de valeurs de λ, μ, ν seraient, d'après (69),

$$x_1:x_2:x_3=\frac{\mu^2-\nu^2}{b\nu+c\mu-a}:\frac{\nu^2-\lambda^2}{c\lambda+a\nu-b}:\frac{\lambda^2-\mu^2}{a\mu+b\lambda-c},$$

valeurs qui, d'après (70), satisfont à l'équation de la droite à l'infini. Il ne correspond donc aucun cercle réel à la supposition que nous venons d'examiner. Le résultat de notre examen fournit donc ce théorème :

Tous les cercles correspondant à un seul système de valeurs de λ, μ, ν *ne sont concentriques que dans les deux cas précités* (1°).

Est-il possible de faire coïncider la droite des centres

avec une droite

$$(71) \qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

arbitrairement choisie dans le plan du triangle? D'après (60), il suffit que les équations (72)

$$(73) \qquad \begin{cases} \sin(A + 2\varphi_1) = \beta u_1, \\ \sin(B + 2\varphi_2) = \beta u_2, \\ \sin(C + 2\varphi_3) = \beta u_3 \end{cases}$$

soient satisfaites à la fois; β est une quantité qu'on peut déterminer de la manière suivante. D'après (48), on aura

$$\text{arc}\sin\beta u_1 + \text{arc}\sin\beta u_2 + \text{arc}\sin\beta u_3 = (2m+1)\pi;$$

par conséquent,

$$(73) \quad \beta = \pm \frac{1}{2u_1u_2u_3}\sqrt{2u_2^2u_3^2 + 2u_3^2u_1^2 - 2u_1^2u_2^2 - u_1^4 - u_2^4 - u_3^4}.$$

D'après (50), on aura encore

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} &= [\cos A - \cos(A + 2\varphi_1)] \\ &\quad : [\cos B - \cos(B + 2\varphi_2)] : [\cos C - \cos(C + 2\varphi_3)] \\ &= \left(\cos A \pm \frac{u_2^2 + u_3^2 - u_1^2}{2u_2u_3}\right) : \left(\cos B \pm \frac{u_3^2 + u_1^2 - u_2^2}{2u_3u_1}\right) \\ &\quad : \left(\cos C \pm \frac{u_1^2 + u_2^2 - u_3^2}{2u_1u_2}\right). \end{aligned}$$

Si l'on peut construire un triangle dont les côtés soient proportionnels à u_1, u_2, u_3, et si l'on désigne par U_1, U_2, U_3 ses angles, on aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} &= (\cos A \pm \cos U_1) \\ &\quad : (\cos B \pm \cos U_2) : (\cos C \pm \cos U_3) \end{aligned}$$

et, d'après (72) et (73),

$$\varphi_1 = \frac{\pi - (A \pm U_1)}{2} \quad \text{ou} \quad \varphi_1 = \frac{2\pi - (A \pm U_1)}{2},$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi - (B \pm U_2)}{2} \quad \text{ou} \quad \varphi_2 = \frac{2\pi - (B \pm U_2)}{2}, \quad \ldots\ldots$$

Examinons à quelle condition la droite des centres passe par le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Il faut et il suffit, pour cela, que l'équation (63) soit satisfaite par

$$x_1 : x_2 : x_3 = \cos A : \cos B : \cos C,$$

c'est-à-dire qu'on ait

$$\sin 2(A+\varphi_1) + \sin 2(B+\varphi_2) + \sin 2(C+\varphi_3) \\ = -(\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_3)$$

ou, après quelques réductions,

$$\frac{\sin(A+\varphi_1)}{\sin\varphi_1}\,\frac{\sin(B+\varphi_2)}{\sin\varphi_2}\,\frac{\sin(C+\varphi_3)}{\sin\varphi_3} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \lambda\mu\nu = 1.$$

Cette équation est, d'après (49), équivalente à la suivante

$$\frac{A'B}{A'C}\,\frac{B'C}{B'A}\,\frac{C'A}{C'B} = 1,$$

laquelle indique que les points d'intersection des directions λ, μ, ν avec les côtés opposés du triangle ABC sont en ligne droite; d'où ce théorème :

Si les trois directions λ, μ, ν *rencontrent les côtés opposés du triangle* ABC *en trois points situés en ligne droite, la droite des centres passera par le centre du cercle circonscrit.*

Un cas particulier est celui où ces points d'intersection sont sur la droite à l'infini. On revient alors au théorème connu de M. Lemoine.

Cherchons de même la condition qui doit être satisfaite afin que la droite des centres passe par le centre du cercle inscrit. Cette condition revient à

$$\sin(A+2\varphi_1) + \sin(B+2\varphi_2) + \sin(C+2\varphi_3) = 0,$$

équation exigeant qu'une des relations

$$\cos\left(\frac{A}{2}+\varphi_1\right)=0,\quad \cos\left(\frac{B}{2}+\varphi_2\right)=0,\quad \cos\left(\frac{C}{2}+\varphi_3\right)=0$$

ait lieu. D'où cet énoncé :

Si une des directions λ, μ, ν *divise en deux parties égales un des angles extérieurs du triangle, la droite des centres passe par le centre du cercle inscrit.*

La droite des centres passera par le point de Lemoine, si l'on a

$$\sin A \sin(A+2\varphi_1)+\sin B\sin(B+2\varphi_2) + \sin C\sin(C+2\varphi_3)=0,$$

ce qui revient à

$$(75)\qquad \frac{\cos(A+\varphi_1)}{\cos\varphi_1}\,\frac{\cos(B+\varphi_2)}{\cos\varphi_2}\,\frac{\cos(C+\varphi_3)}{\cos\varphi_3}=-1.$$

Si par A, B, C nous traçons trois droites perpendiculaires aux directions λ, μ, ν et rencontrant les côtés du triangle sous les angles ψ_1, ψ_2, ψ_3, on aura, d'après (75),

$$\frac{\sin(A+\psi_1)}{\sin\psi_1}\,\frac{\sin(B+\psi_2)}{\sin\psi_2}\,\frac{\sin(C+\psi_3)}{\sin\psi_3}=-1,$$

d'où ce théorème :

Si les directions λ, μ, ν *sont telles que les perpendiculaires menées par* A, B, C *sur ces directions sont concourantes, la droite des centres passe par le point de Lemoine du triangle* ABC.

Examinons enfin le lieu des centres en supposant que l'équation

$$1+\lambda\mu\nu=0$$

soit satisfaite. A cet effet, retournons à l'équation dé-

signée par (62) et à une équation analogue renfermant $cd_2 - bd_3$

$$C\left[2(bd_1 + ad_2) - \frac{b}{y_1} - \frac{a}{y_2}\right]$$
$$+ R\left(bd_1 - ad_2 + \frac{b}{y_1} - \frac{a}{y_2}\right) = \frac{bx_1}{y_1^2} + \frac{ax_2}{y_2^2},$$
$$C\left[2(cd_2 - bd_3) + \frac{c}{y_2} - \frac{b}{y_3}\right]$$
$$+ R\left(cd_2 - bd_3 + \frac{c}{y_2} - \frac{b}{y_3}\right) = \frac{cx_2}{y_2^2} - \frac{bx_3}{y_3^2}.$$

Dans la dernière remplaçons $cd_2 - bd_3$ par sa valeur tirée de la seconde des équations (20). On trouve

$$C\left[2(bd_1 - ad_2) - \frac{2a}{y_2} + \mu\left(\frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_3}\right)\right]$$
$$+ R\left[bd_1 - ad_2 - \frac{a}{y_2} + \mu\frac{b}{y_3}\right] = - \mu\frac{cx_2}{y_2^2} + \mu\frac{bx_3}{y_3^2}.$$

La différence de ce résultat et de l'équation (62), en remplaçant R par sa valeur donnée par (12), peut être mise sous la forme

$$C\left[\frac{b}{y_1} + \frac{a}{y_2} - \mu\left(\frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_3}\right)\right]$$
$$= \mu\frac{b}{y_3}\frac{x_1}{y_1} - \left[\frac{b}{y_1} + \frac{a}{y_2} - \mu\left(\frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_3}\right)\right]\frac{x_2}{y_2} - \frac{b}{y_1}\frac{x_3}{y_3},$$

équation qui, en vertu de la relation (24) et de ses analogues, se réduit à

(76)

$$\left(\frac{a}{y_3} + \frac{c}{y_1}\right)C = \lambda\mu\frac{b}{y_3}\frac{x_1}{y_1} - \left(\frac{a}{y_3} + \frac{c}{y_1}\right)\frac{x_2}{y_2} - \lambda\frac{b}{y_1}\frac{x_3}{y_3}.$$

De même,

$$\left(\frac{b}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right)C = -\mu\frac{c}{y_2}\frac{x_1}{y_1} + \mu\nu\frac{c}{y_1}\frac{x_2}{y_2} - \left(\frac{b}{y_1} + \frac{a}{y_2}\right)\frac{x_3}{y_3},$$
$$\left(\frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_3}\right)C = -\left(\frac{c}{y_2} + \frac{b}{y_3}\right)\frac{x_1}{y_1} - \nu\frac{a}{y_3}\frac{x_2}{y_2} + \nu\lambda\frac{a}{y_2}\frac{x_3}{y_3}.$$

La somme des produits de ces équations par $-\nu$, $\nu\lambda$, 1 respectivement, est une identité.

En éliminant C entre les deux premières équations, on obtient, pour la droite des centres, l'équation

$$(77)\quad \left\{\begin{aligned} &\mu\frac{x_1}{y_1}\left[\frac{c}{y_2}\left(\frac{a}{y_3}+\frac{c}{y_1}\right)+\lambda\frac{b}{y_3}\left(\frac{b}{y_1}+\frac{a}{y_2}\right)\right] \\ &\quad -\frac{x_2}{y_2}\left(\frac{a}{y_3}+\frac{c}{y_1}\right)\left(\frac{b}{y_1}+\frac{a}{y_2}+\mu\nu\frac{c}{y_1}\right) \\ &\qquad +\frac{x_3}{y_3}\left(\frac{b}{y_1}+\frac{a}{y_2}\right)\left(\frac{a}{y_3}+\frac{c}{y_1}-\lambda\frac{b}{y_1}\right)=0. \end{aligned}\right.$$

D'après l'équation (24) et ses analogues, on aura

$$\begin{aligned} &\mu\left[\frac{c}{y_2}\left(\frac{a}{y_3}+\frac{c}{y_1}\right)+\lambda\frac{b}{y_3}\left(\frac{b}{y_1}+\frac{a}{y_2}\right)\right] \\ &\quad =-\frac{1}{\nu}\left(\frac{c}{y_2}+\frac{b}{y_3}\right)\left(\frac{b}{y_1}+\frac{a}{y_2}-\mu\frac{c}{y_2}\right) \\ &\quad =\mu\left(\frac{c}{y_2}+\frac{b}{y_3}\right)\left(\frac{a}{y_3}+\frac{c}{y_1}+\lambda\mu\frac{b}{y_3}\right) \end{aligned}$$

et deux autres équations résultant de la précédente par une permutation cyclique de λ, μ, ν; a, b, c; y_1, y_2, y_3.

A l'aide de ces formules, l'équation (77) de la droite des centres peut se présenter sous la forme plus symétrique

$$\begin{aligned} &-\mu\frac{x_1}{y_1}\left[\frac{c}{y_2}\left(\frac{a}{y_3}+\frac{c}{y_1}\right)+\lambda\frac{b}{y_3}\left(\frac{b}{y_1}+\frac{a}{y_2}\right)\right] \\ &\quad +\frac{x_2}{y_2}\left[\frac{a}{y_3}\left(\frac{b}{y_1}+\frac{a}{y_2}\right)+\mu\frac{c}{y_1}\left(\frac{c}{y_2}+\frac{b}{y_3}\right)\right] \\ &\quad +\lambda\mu\frac{x}{y_3}\left[\frac{b}{y_1}\left(\frac{c}{y_2}+\frac{b}{y_3}\right)+\nu\frac{a}{y_2}\left(\frac{a}{y_3}+\frac{c}{y_1}\right)\right]=0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} -\mu\frac{x_1}{y_1}\left(\frac{cp_2}{y_2}+\frac{\lambda bp_3}{y_3}\right)+\frac{x_2}{y_2}\left(\frac{ap_3}{y_3}+\frac{\mu cp_1}{y_1}\right)& \\ +\lambda\mu\frac{x_3}{y_3}\left(\frac{bp_1}{y_1}+\frac{\nu ap_2}{y_2}\right)&=0. \end{aligned}$$

Cette droite passe par les points

$$x_1 : x_2 : x_3 = ay_1 : \lambda\mu by_2 : -\mu cy_3,$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = p_1 : p_2 : y_3.$$

de sorte qu'elle dégénérera en un seul point, si l'on se trouve dans l'un des cas suivants :

1° $p_1 = p_2 = p_3 = 0$; aucune valeur finie de y_1, y_2, y_3 ne correspond à cette hypothèse;

2° $ay_1 = \lambda\mu by_2 = -\mu cy_3 = 0$; cette équation exige $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, ce qui reviendrait à une absurdité;

3° $p_1 : p_2 : p_3 = ay_1 : \lambda\mu by_2 : -\mu cy_3$. D'après la formule (53), on aurait alors

$$ay_1 + by_2 + cy_3 = 0,$$

et par suite le point y_1, y_2, y_3 appartiendrait à la droite de l'infini.

Nous sommes arrivés ainsi à ce résultat, qu'en supposant les directions λ, μ, ν concourantes, la droite des centres ne dégénérera jamais en un seul point.

Il nous resterait encore à examiner la droite des centres dans le cas

$$\lambda = 1, \qquad \mu\nu = -1,$$

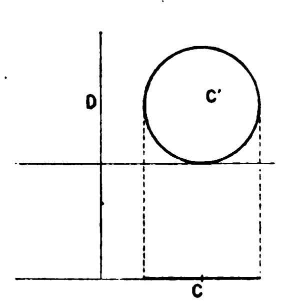
que nous avons déjà considéré. On n'obtient ainsi aucun résultat remarquable.

SOLUTION DE LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION (ENSEIGNEMENT SPÉCIAL) EN 1891;

PAR M. ROUBAUDI,
Professeur au lycée de Caen.

Dans le plan vertical de projection est tracée une verticale D *qui occupe le milieu de l'épure; autour de cette droite tourne un cercle* C *de rayon* c, *tangent au plan horizontal de projection, situé dans un plan*

parallèle au plan vertical de projection, à une distance b en avant de ce plan; de plus le centre de ce cercle



est à droite du plan vertical de profil mené par D *et à une distance a de ce plan.*

1° *Mettre cette surface en projection;*

2° *Prouver que par chaque point* M *de cette surface il passe deux cercles* C, C_1 *tracés sur elle, dont les plans sont verticaux. En conclure que toute sphère menée par un cercle générateur* C *est tangente en deux points à la surface;*

3° *Prouver que sur chaque cercle générateur* C *il existe un couple de points réels* P, P' *situés sur une même verticale, et qui sont tels que le plan tangent en chacun d'eux à la surface va passer au centre de la surface. En conclure que les plans tangents réels issus de ce centre à la surface enveloppent un cône de révolution;*

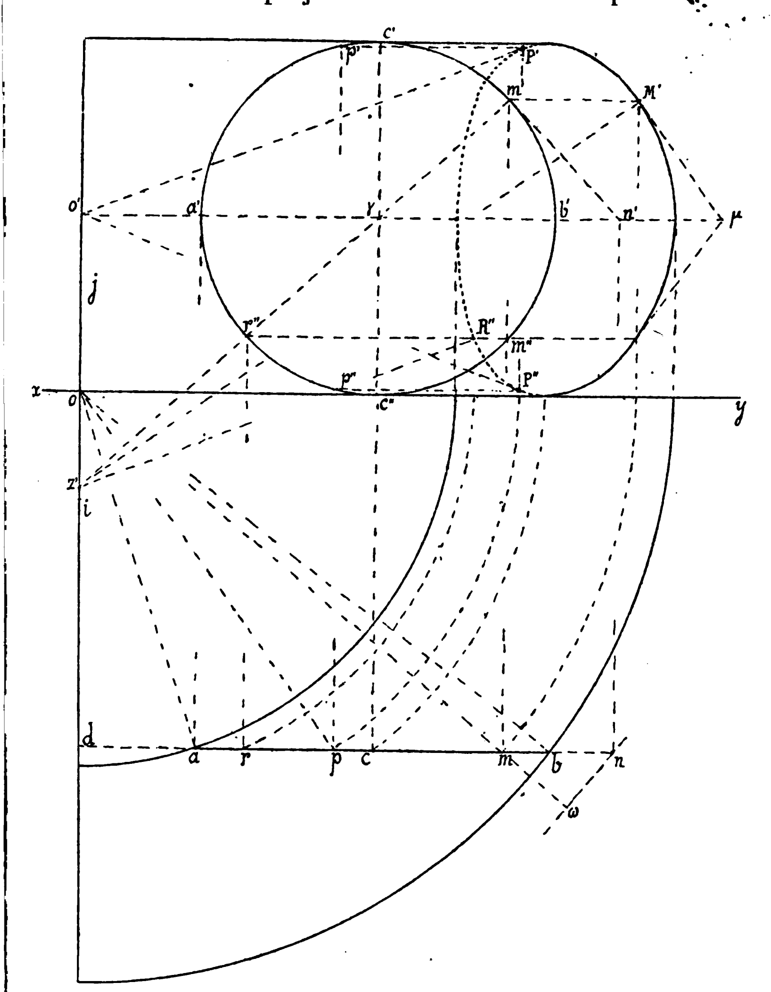
4° *On demande de construire l'intersection de la surface avec l'un des plans tangents à ce cône, perpendiculaire au plan vertical de projection. Rabattre cette intersection sur un plan horizontal.*

Données en centimètres :

$$a = 5, \qquad b = 6, \qquad c = 3.$$

Une rédaction détaillée doit accompagner l'épure ; toutes les méthodes sont admises.

1° La mise en projection de la surface ne présente



aucune difficulté. Nous ne représenterons que le quart situé dans le premier dièdre, à droite du plan de profil de

l'axe. Les points (a,a'), (b,b') de la génératrice, qui sont le plus rapproché et le plus éloigné de l'axe, décrivent les parallèles de rayon minimum et maximum et formant par suite le contour apparent horizontal de la surface. Le point le plus haut (c, c') et le point le plus bas (c, c'') décrivent les parallèles supérieur et inférieur, qui font partie du contour apparent vertical. Ces quatre parallèles fournissent les points de la méridienne pour lesquels la tangente est parallèle ou perpendiculaire à l'axe. Cette courbe n'offre pas d'autres points remarquables réels; elle est symétrique par rapport à la droite $o'\gamma$, trace verticale du plan horizontal mené par le centre du cercle générateur. Le point de rencontre (o,o') de ce plan avec l'axe est le centre de la surface.

On obtient un point quelconque M' de la méridienne en amenant, par une rotation autour de l'axe, un point quelconque (m,m') de la circonférence génératrice dans le plan vertical de projection. Pour obtenir la tangente en ce point, nous remarquons que le plan de bout $m'\gamma$ est le plan normal en (m,m') à la génératrice, et par suite que son point de rencontre (o,z') avec l'axe est le sommet du cône des normales relatif au parallèle du point (m,m') : z'M' est donc la normale à la méridienne; on en déduit la tangente μM'. Le point (p,p'') du cercle qui est diamétralement opposé à (m,m') fournit le point R'' en lequel la normale passe encore par z'.

On voit d'après cela que la circonférence génératrice en projection verticale et la demi-méridienne de la surface engendrée se correspondent point par point de manière que deux points homologues m' et M' sont sur une même perpendiculaire à l'axe, et que les normales en ces points se coupent sur cet axe. En d'autres termes, ces deux courbes ont même sous-normale relativement à l'axe.

De là résulte le moyen de mener d'un point quelconque z' de l'axe une normale à la méridienne.

2° Le plan mené par l'axe perpendiculairement au plan vertical ab du cercle générateur coupe ce dernier plan suivant la verticale (d, oo') : le symétrique du cercle générateur par rapport à cette verticale est situé sur la surface. Lorsque le cercle (c, γ) décrit la surface, son plan enveloppe un cylindre vertical Σ ayant pour directrice dans le plan horizontal le cercle de centre o et du rayon $od = b$. Donc tout plan tangent à ce cylindre coupe la surface suivant deux cercles et est par suite bitangent aux points de rencontre de ces cercles; les points de contact sont réels ou imaginaires suivant que la projection verticale du cercle générateur rencontre ou ne rencontre pas l'axe.

On en conclut que le cylindre Σ est doublement circonscrit à la surface; les parallèles de contact sont de part et d'autre du plan horizontal de symétrie $o'\gamma$, à la distance commune $\sqrt{c^2 - a^2}$.

Par un point quelconque m de la surface on peut mener au cylindre Σ deux plans tangents; chacun d'eux coupe la surface suivant deux cercles; deux de ces quatre cercles passent évidemment par le point M.

Considérons maintenant une sphère passant par un cercle générateur C; le symétrique C_1 du cercle C par rapport au plan méridien du centre de la sphère est situé à la fois sur la surface et sur la sphère. Donc celle-ci est tangente à la surface aux deux points de rencontre des cercles C et C_1; les deux points de contact sont situés sur une même verticale; ils sont réels ou imaginaires selon que la distance du centre de la sphère au centre du cercle C est inférieure ou supérieure à $\frac{bc}{a+c}$.

3° Cherchons la trace du plan tangent à la surface au

point (m, m') du cercle générateur, sur le plan horizontal de symétrie $o'\gamma$: c'est la perpendiculaire $n\omega$ abaissée de la trace de la tangente au cercle sur le rayon om. Le plan tangent au point (m, m'') a aussi pour trace $n\omega$. Il faut chercher la position de la corde verticale $(m, m'm'')$ pour laquelle $n\omega$ passe par le point o. A cet effet, il suffit de remarquer que, les quatre points m, n, a, b formant une division harmonique, le faisceau des quatre droites ωm, ωn, ωa, ωb est harmonique, et comme les deux rayons ωm, ωn sont rectangulaires, ils sont les bissectrices des angles supplémentaires formés par les deux autres. Nous obtiendrons donc la corde cherchée, en menant la bissectrice op de $\widehat{aob}$, ce qui fournit le couple de points toujours réels (p, p'), (p, p''), en chacun desquels le plan tangent passe par le centre (o, o') de la surface. Les points (p, p'), (p, p'') fournissent les points P' et P'' de la méridienne pour lesquels les tangentes passent par le centre. Ces tangentes $o'P'$, $o'P''$ forment la méridienne d'un cône de révolution doublement circonscrit à la surface le long des parallèles des points (p, p'), (p, p''). Ce cône est évidemment l'enveloppe des plans tangents réels à la surface issus du centre.

Nous allons montrer maintenant que la surface admet un parallèle double à l'infini. Pour que deux points A et B de la génératrice décrivent le même parallèle, il faut et il suffit que ces deux points soient dans un même plan horizontal, à égales distances de l'axe; autrement, que le pied de la perpendiculaire commune à l'axe et à la droite AB tombe au milieu de la corde AB. Or, le lieu des milieux des cordes horizontales du cercle générateur est le diamètre vertical de ce cercle, et le lieu des pieds des perpendiculaires communes à l'axe et à ces cordes est la verticale du point d. Ces deux lignes droites paral-

lèles se rencontrent en un point à l'infini qui décrit un parallèle double de la surface.

Le cône qui a pour base ce parallèle et pour sommet le centre de la surface est un cône asymptote double. Ainsi les plans tangents à la surface issus du centre enveloppent deux cônes : un cône simple réel K et un cône asymptote double imaginaire.

4° Tout plan tangent au cône réel K est bitangent à la surface aux points où la génératrice de contact rencontre les parallèles de contact du cône et de la surface : ces points sont des points doubles de la section. Celle-ci admet en outre deux points doubles à l'infini, qui sont les points de rencontre du plan sécant avec le parallèle double. Or toute surface de révolution engendrée par une conique est du quatrième ordre, à moins que l'intersection du plan de la conique avec le plan méridien, qui lui est perpendiculaire, ne soit un axe de cette conique, ce qui n'a pas lieu ici. La section est donc du quatrième ordre et comme elle présente quatre points doubles, elle se décompose en deux coniques, lesquelles, passant par les points cycliques, sont des cercles. Ainsi la section demandée se compose de deux cercles égaux.

En prenant comme plan sécant le plan de bout $o'P'$ et en désignant par u et v les longueurs oa et ob, on reconnait très aisément que les centres (i, o'), (j, o') des cercles sont à égales distances du centre de la surface, sur la perpendiculaire menée de ce centre au plan méridien perpendiculaire au plan sécant, savoir

$$oi = oj = \frac{v - u}{2},$$

et que la longueur commune des rayons est

$$\frac{v + u}{2}.$$

En projection horizontale on a deux ellipses dont on obtient facilement les axes. Le pied o de l'axe n'est pas un foyer commun de ces ellipses, car c'est là une propriété caractéristique du tore à méridienne circulaire.

Avec les données, tous les points de la surface sont extérieurs au cylindre Σ et au cône K doublement circonscrits. On en conclut que par chaque point M de la surface il passe cinq cercles réels, savoir : le parallèle, deux des quatre cercles donnés par les plans tangents au cylindre Σ menés par M, deux des quatre cercles donnés par les plans tangents au cône K menés par M.

5° Formons l'équation de la surface en la rapportant à un axe $(o, o'z')$ à son plan de symétrie horizontal $o'y$. Les équations du cercle générateur sont

$$(1) \qquad y = b, \qquad (x-a)^2 + z^2 - c^2 = 0$$

et l'on a d'ailleurs

$$\overline{om}^2 = \overline{od}^2 + \overline{dm}^2 = b^2 + x^2.$$

On obtient donc l'équation de la méridienne en remplaçant dans la seconde des équations x par $\sqrt{b^2 + x^2}$, ce qui donne

$$(2) \qquad (x^2 + z^2 + a^2 - b^2 - c^2)^2 = 4a^2(x^2 - b^2).$$

Enfin l'équation de la surface se déduit de cette dernière en y remplaçant x par $\sqrt{x^2 + y^2}$, ce qui fournit

$$(3) \qquad (x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2 - c^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2 - b^2).$$

On peut tirer de cette équation toutes les propriétés que nous avons établies géométriquement. Proposons-nous seulement de former la section par le plan bitangent de bout $o'P'$. Désignons par α l'inclinaison de ce plan, c'est-à-dire l'angle $\widehat{P'o'b'}$, et par X, Z les coordonnées du point P'. On sait que le point P' se déduit du

point p situé sur la bissectrice de l'angle $\widehat{aob}$; on a donc

$$\overline{op}^2 = oa.ob - pa.pb$$

ou

$$X^2 = uv - pa.pb.$$

Or $\frac{pa}{u} = \frac{pb}{v} = \frac{2c}{u+v}$; on en tire

$$pa.pb = \frac{4c^2uv}{(u+v)^2}$$

et par suite

$$X^2 = uv - \frac{4c^2uv}{(u+v)^2},$$

avec

(4) $$\begin{cases} u = \sqrt{b^2 + (a-c)^2}, \\ v = \sqrt{b^2 + (a+c)^2}. \end{cases}$$

En appelant x_1 l'abscisse du point (p, p'), l'équation (1) donne

$$Z^2 = c^2 - (x_1 - a)^2;$$

or on a

$$x_1 = dp = da + pa = a - c + \frac{2cu}{u+v};$$

d'où

$$Z^2 = \frac{4c^2uv}{(u+v)^2}.$$

Des valeurs que nous venons de trouver pour X et Z, on tire

$$X^2 + Z^2 \quad \text{ou} \quad \overline{o'P'}^2 = uv;$$

ainsi la longueur O′P′ de la tangente à la méridienne issue du centre est moyenne proportionnelle entre oa et ob.

Puis,

(5) $$\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Z^2}} \quad \text{ou} \quad \sin\alpha = \frac{2c}{u+v}.$$

Il est aisé maintenant de former l'équation de la

section de la surface par le plan debout $o'P'$: il suffit de remplacer, dans l'équation (3), x par $x\cos\alpha$ et z par $x\sin\alpha$, ce qui donne

$$(x^2+y^2+a^2-b^2-c^2)^2 = 4a^2(x^2+y^2-b^2-x^2\sin^2\alpha),$$

ou

$$(x^2+y^2-b^2)^2-2(a^2+c^2)(x^2+y^2-b^2) \\ +(a^2-c^2)^2+4a^2x^2\sin^2\alpha = 0,$$

ou

$$x^2+y^2-a^2-b^2-c^2)^2-4a^2c^2-4a^2x^2\sin^2\alpha = 0.$$

En tenant compte de la relation (5) et des relations (4), desquelles on déduit

$$2(a^2+b^2+c^2) = u^2+v^2 \quad \text{et} \quad 16a^2c^2 = (u^2-v^2)^2,$$

on peut mettre, après quelques transformations, l'équation précédente sous la forme

$$x^4-2x^2(uv-y^2)+y^4-y^2(u^2+v^2)+u^2v^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x^2 = uv-y^2 \pm y(u-v),$$

qu'on peut écrire

$$x^2+\left(y \mp \frac{u-v}{2}\right)^2 = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2,$$

équation de l'ensemble de deux cercles ayant pour rayon commun $\frac{u+v}{2}$, et dont les coordonnées des centres sont $x=0$, $y=\pm\frac{u-v}{2}$.

Le demi petit axe des ellipses projections horizontales de ces cercles est égal à $\frac{u+v}{2}\cos\alpha$ et, par suite, la demi-distance focale est égale à $\frac{u+v}{2}\sin\alpha$ ou c. Ainsi la distance focale de ces ellipses est égale au diamètre du cercle générateur.

CONSTRUCTIONS ET FORMULES RELATIVES AU TRIANGLE;

PAR M. C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences.

1. J'ai eu l'occasion de signaler déjà les deux propriétés suivantes, à plusieurs reprises; je me borne à les rappeler ici, laissant au lecteur le soin de la vérification :

1° Si l'on porte sur une droite indéfinie OX les trois longueurs OA, OB, OC égales aux côtés a, b, c d'un triangle, et si l'on trace par A, B, C trois droites formant avec OX des angles égaux aux demi-angles $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ du triangle, ces trois droites concourent en un point M; MP étant la perpendiculaire abaissée de M sur OX, on a

$$MP = r \text{ (rayon du cercle inscrit)}; \qquad OP = \frac{a+b+c}{2} = p,$$

et, par suite,

$$AP = p - a, \qquad BP = p - b, \qquad CP = p - c.$$

Les longueurs AM, BM, CM représentent les distances δ_a, δ_b, δ_c du centre du cercle inscrit aux trois sommets du triangle. L'aire du triangle considéré est double de celle du triangle rectangle OPM.

2° Si l'on porte de même sur une droite OX trois longueurs OA′, OB′, OC′ mesurées respectivement par les nombres a^2, b^2, c^2, carrés des côtés du triangle, et si l'on trace des droites par A′, B′, C′, formant avec OX des angles respectivement égaux à ceux du triangle, ces droites concourent en un point M′; M′P′ étant la per-

pendiculaire sur OX, OP′ est mesurée par

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=q^2,$$

P′M′ par 2S (S étant l'aire du triangle), A′M′, B′M′, C′M′ par bc, ca, ab respectivement ; OM′ a pour mesure

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2+4S^2.$$

Enfin l'angle $M'OX=\omega$ n'est autre que l'angle de Brocard, défini par la relation

$$\cot\omega=\cot A+\cot B+\cot C.$$

2. Toutes ces propriétés sont des conséquences directes des équipollences

$$(1)\qquad a+\delta_a\varepsilon^{\frac{A}{2}}=b+\delta_b\varepsilon^{\frac{B}{2}}=c+\delta_c\varepsilon^{\frac{C}{2}}=p+ri,$$

$$(2)\qquad a^2+bc\varepsilon^A=b^2+ca\varepsilon^B=c^2+ab\varepsilon^C=q^2+2Si,$$

lesquelles pourraient se décomposer chacune en deux séries d'équations ordinaires, si l'on voulait séparer les parties imaginaires et les parties réelles.

De ces relations, il est possible de déduire aisément quelques conséquences intéressantes et dont quelques-unes n'ont peut-être pas été remarquées, bien qu'au fond elles ne soient pas nouvelles.

En élevant au carré la première formule (1), on a

$$a^2+2a\delta_a\varepsilon^{\frac{A}{2}}+\delta_a^2\varepsilon^A=p^2-r^2+2Si,$$

et, par soustraction de la première formule (2) qui est

$$a^2+bc\varepsilon^A=q^2+2Si,$$

$$2a\delta_a\varepsilon^{\frac{A}{2}}=(bc-\delta_a^2)\varepsilon^A+p^2-q^2-r^2,$$

$$2a\delta_a=(bc-\delta_a^2)\varepsilon^{\frac{A}{2}}+(p^2-q^2-r^2)\varepsilon^{-\frac{A}{2}}.$$

Cette équipollence conduit immédiatement aux trois

identités

$$bc - \delta_a^2 = ca - \delta_b^2 = ab - \delta_c^2 = p^2 - q^2 - r^2 = \frac{abc}{p} = 4Rr,$$

en écrivant que la partie imaginaire du second membre s'annule; R est le rayon du cercle circonscrit.

En égalant les parties réelles, on trouve, au contraire,

$$\delta_a = \frac{bc}{p}\cos\frac{A}{2},$$

puis

$$\delta_b = \frac{ca}{p}\cos\frac{B}{2}, \qquad \delta_c = \frac{ab}{p}\cos\frac{C}{2},$$

ou encore

$$\delta_a = \frac{4Rr}{a}\cos\frac{A}{2}, \qquad \delta_b = \frac{4Rr}{b}\cos\frac{B}{2}, \qquad \delta_c = \frac{4Rr}{c}\cos\frac{C}{2}.$$

En appelant $A_1 B_1 C_1$ le triangle formé par les trois bissectrices des angles extérieurs du triangle donné, on reconnaît que ses côtés sont $a_1 = 4R\cos\frac{A}{2}, \ldots$ Les formules précédentes peuvent donc s'écrire ainsi :

$$\frac{a\,\delta_a}{a_1} = \frac{b\,\delta_b}{b_1} = \frac{c\,\delta_c}{c_1} = r.$$

3. Si l'on élève à une puissance entière n la première équipollence (1), on a, en désignant par 1, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^{n-1}, 1, les coefficients du binôme

$$a^n + C_n^1 a^{n-1}\delta_a \varepsilon^{\frac{A}{2}} + C_n^2 a^{n-2}\delta_a^2 \varepsilon^{\frac{2A}{2}} + \ldots + \delta_a^n \varepsilon^{\frac{nA}{2}}$$
$$= p^n + C_n^1 p^{n-1} r i - C_n^2 p^{n-2} r^2 - C_n^3 p^{n-3} r^3 i + \ldots + r^n i^n;$$

et, en séparant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$a^n + C_n^1 a^{n-1}\delta_a \cos\frac{A}{2} + C_n^2 a^{n-2}\delta_a^2 \cos A + \ldots + \delta_a^n \cos\frac{nA}{2}$$
$$= p^n - C_n^2 p^{n-2} r^2 + C_n^4 p^{n-4} r^4 - \ldots,$$

$$C_n^1 a^{n-1}\delta_a \sin\frac{A}{2} + C_n^2 a^{n-2}\delta_a^2 \sin A + \ldots + \delta_a^n \sin\frac{nA}{2}$$
$$= C_n^1 p^{n-1} r - C_n^3 p^{n-3} r^3 + C_n^5 p^{n-5} r^5 - \ldots,$$

plus deux autres formules analogues, dont les seconds membres seront identiques, en changeant les lettres a en b, puis en c.

Par exemple, en faisant $n = 3$,

$$a^3 + 3a^2\delta_a \cos\frac{A}{2} + 3a\delta_a^2 \cos A + \delta_a^3 \cos\frac{3A}{2} = p^3 - 3pr^2,$$

$$3a^2\delta_a \sin\frac{A}{2} + 3a\delta_a^2 \sin A + \delta_a^3 \sin\frac{3A}{2} = 3p^2 r - r^3.$$

4. En procédant de la même façon au moyen des équipollences (2) on trouverait deux séries de relations générales que nous n'écrivons pas pour abréger, et dont nous nous contentons d'indiquer l'application au cas de $n = 3$,

$$a^6 + 3a^4bc\cos A + 3a^2b^2c^2\cos 2A + b^3c^3\cos 3A = q^6 - 12q^2s^2,$$

$$3a^4bc\sin A + 3a^2b^2c^2\sin 2A + b^3c^3\sin 3A = 6q^4S - 8S^3.$$

SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

PAR M. X. ANTOMARI,

Professeur au lycée Henri IV.

Par cinq points donnés, tels qu'il n'y en ait pas quatre en ligne droite, on peut faire passer une conique et une seule.

Je prends l'un des cinq points pour origine des coordonnées et soient (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$ les quatre autres. Je considère l'équation

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Si cette équation est du second degré, elle représente évidemment une conique passant par les cinq points donnés. Je vais alors chercher les conditions que doivent remplir les cinq points pour que l'équation s'abaisse au premier degré. Il faut évidemment pour cela que les coefficients de x^2, xy, y^2 soient nuls simultanément. Or, si l'on pose

$$\begin{aligned}
A &= (x_1y_2 - y_1x_2)(x_3y_4 - y_3x_4),\\
B &= (x_2y_3 - y_2x_3)(x_1y_4 - y_1x_4),\\
C &= (x_3y_1 - y_3x_1)(x_2y_4 - y_2x_4),
\end{aligned}$$

les trois coefficients sont respectivement

$$\begin{aligned}
L &= A(y_1y_2 + y_3y_4) + B(y_2y_3 + y_1y_4) + C(y_3y_1 + y_2y_4),\\
M &= A(x_1y_2 + y_1x_2 + x_3y_4 + y_3x_4)\\
&\quad + B(x_1y_4 + y_1x_4 + x_2y_3 + y_2x_3)\\
&\quad + C(x_1y_3 + y_1x_3 + x_2y_4 + y_2x_4),\\
N &= A(x_1x_2 + x_3x_4) + B(x_2x_3 + x_1x_4) + C(x_3x_1 + x_2x_4),
\end{aligned}$$

le second, au signe près.

D'ailleurs, à cause de l'identité

$$A + B + C = 0,$$

les valeurs de L, M, N prennent la forme

$$\begin{aligned}
L &= A(y_2 - y_3)(y_1 - y_4) + B(y_1 - y_2)(y_4 - y_3),\\
M &= A[(x_1 - x_4)(y_2 - y_3) + (y_1 - y_4)(x_2 - x_3)]\\
&\quad + B[(x_1 - x_2)(y_4 - y_3) + (y_1 - y_2)(x_4 - x_3)],\\
N &= A(x_2 - x_3)(x_1 - x_4) + B(x_1 - x_2)(x_4 - x_3).
\end{aligned}$$

Si l'on égale ces trois coefficients à zéro, les trois équations

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0$$

ainsi obtenues peuvent être vérifiées de deux manières : ou bien en prenant $A = 0$, $B = 0$; ou bien en prenant A et B différents de zéro.

Première hypothèse. — Pour que A et B soient nuls tous deux, il faut qu'un facteur de A et un facteur de B soient nuls. Quels que soient les deux facteurs ainsi choisis que l'on égale à zéro, on voit que, pour avoir simultanément $A = 0$ et $B = 0$, il faut que trois des quatre points (x_i, y_i) soient en ligne droite avec l'origine.

Deuxième hypothèse. — Soient 1, 2, 3, 4 les quatre points (x_i, y_i). Pour que les trois équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ soient vérifiées pour des valeurs de A, B non nulles simultanément, il faut que les déterminants des trois équations prises deux à deux soient nuls. On trouve ainsi les conditions

$$\frac{y_1 - y_4}{x_1 - x_4} + \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} + \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4}$$

$$\frac{y_1 - y_4}{x_1 - x_4} \, \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \, \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4}.$$

Ces conditions entraînent les suivantes

$$\frac{y_1 - y_4}{x_1 - x_4} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

$$\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4};$$

ou bien les suivantes

$$\frac{y_1 - y_4}{x_1 - x_4} = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4},$$

$$\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Dans les deux cas, il faut que les quatre points (x_i, y_i) soient en ligne droite.

Si donc, parmi les cinq points, il n'y en a pas quatre en ligne droite, il y a toujours une conique (qui pourra être un système de deux droites) passant par les cinq points donnés.

Remarque. — Si, parmi les cinq points, il y en a quatre en ligne droite, on voit aisément que l'équation (1) est une identité. Par exemple, supposons que les trois points 1, 2, 3 soient en ligne droite avec l'origine, nous aurons

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \lambda$$

et l'équation (1) deviendra

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y \\ x_1^2 & \lambda x_1^2 & \lambda^2 x_1^2 & x_1 & \lambda x_1 \\ x_2^2 & \lambda x_2^2 & \lambda^2 x_2^2 & x_2 & \lambda x_2 \\ x_3^2 & \lambda x_3^2 & \lambda^2 x_3^2 & x_3 & \lambda x_3 \\ x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Les coefficients de x^2, xy, y^2 sont nuls par hypothèse. Pour vérifier que le coefficient de x, par exemple, est nul, il suffit de développer ce coefficient par rapport aux éléments de sa quatrième ligne.

Le résultat auquel nous sommes conduit est évident géométriquement.

Je dis maintenant que *si parmi les cinq points il n'y en a pas quatre en ligne droite, il y a une seule conique répondant à la question.*

Je suppose, en effet, qu'il y en ait plusieurs, je prends l'un des cinq points pour origine et j'appelle

$$(2) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + 0$$

l'équation de l'une des coniques cherchées, Σ. En exprimant qu'elle passe par les autres points (x_i, y_i), on obtient les quatre équations

$$(3) \quad ax_i^2 + 2bx_iy_i + cy_i^2 + 2dx_i + 2ey_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

x, y étant l'un quelconque des points de Σ, les équations (2) et (3) doivent être vérifiées par des valeurs de

a, b, c, d, e, non nulles simultanément, ce qui exige que l'on ait

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Il en résulte que si x et y sont considérés, dans cette équation, comme des coordonnées courantes, cette équation représente *toutes les coniques* passant par les cinq points donnés. Mais il est clair que cette équation ne peut représenter plusieurs coniques que si elle se réduit à une identité; c'est-à-dire, en vertu de la première partie de la proposition, que si parmi les cinq points il en a quatre en ligne droite.

Donc, etc.

SUR L'INTERSECTION DE DEUX QUADRIQUES, DANS LE CAS OU ELLE SE DÉCOMPOSE;

Par M. Arthur TRESSE,
Ancien élève de l'École Normale supérieure.

Ce travail répond à une question qui figure depuis quelques années au programme de l'agrégation de Mathématiques. M. Kœnigs a déjà traité le problème parmi les leçons qu'il a publiées; sa méthode consiste à étudier l'intersection de deux quadriques par rapport aux génératrices de l'une d'elles, et il emploie dans ce but les coordonnées de Chasles. La méthode suivante, tout en usant d'un procédé différent, envisage la ques-

tion au même point de vue. Elle n'a donc pas le mérite d'une grande originalité, et conduit naturellement à présenter les résultats dans le même ordre. Elle pourra cependant offrir quelque intérêt aux lecteurs des *Nouvelles Annales*.

1. Nous emploierons un mode de représentation plane des quadriques, qui figure dans la Géométrie de Clebsch ([1]) et qui n'est, au fond, qu'une généralisation de l'étude de la sphère à l'aide de la projection stéréographique. Pour lui donner la portée dont il est susceptible, nous donnerons aux mots *points, plans* et *droites,* le sens le plus général qu'on leur donne en Géométrie analytique. Nous ne ferons ainsi aucune distinction entre le réel et l'imaginaire, et, par conséquent, regarderons une quadrique comme ayant toujours des génératrices rectilignes.

Soient donc une quadrique S, O un quelconque de ses points, OI, OJ, ses deux génératrices, *supposées distinctes,* passant par ce point.

Soit P un plan arbitraire ne passant pas par O, et rencontrant OI et OJ en I et en J. A tout point M de la surface, nous ferons correspondre, sur le plan P, le point μ, intersection de ce plan avec la droite OM, c'est-à-dire, sa perspective sur le plan P par rapport au point de vue O; μ sera appelé l'*image* de M. En général, tout point M de la surface a une image bien déterminée; et, réciproquement, tout point μ du plan P est l'image d'un point bien déterminé de S, situé sur la droite Oμ. Il n'y a d'exception que : 1° lorsque M vient en O, auquel cas son image est indéterminée sur la

---

([1]) *Vorlesungen über Geometrie,* bearbeitet von Lindemann, t. II, 1re partie, p. 414.

droite IJ; 2° lorsque μ vient soit en I, soit en J, auquel cas il correspond à tous les points, soit de la génératrice OI, soit de la génératrice OJ.

A toute courbe C de S correspond une courbe γ de P, dite son *image,* et lieu des images de ses points. Nous n'étudierons que des courbes C ne passant pas par O; leurs images ne rencontrent donc pas la droite IJ en d'autres points que I et J.

2. Si la courbe C a, en M, une tangente MT, la courbe γ a aussi, en μ, une tangente $\mu\theta$, intersection de P avec le plan OMP.

Si deux courbes C et C_1 se coupent en un point M, non situé sur l'une des droites OI, OJ, et ont en ce point des tangentes distinctes, leurs images se couperont en μ et auront aussi en μ deux tangentes distinctes. Si deux courbes C et C_1 deviennent tangentes en M, leurs images γ et γ_1 deviennent tangentes en μ; plus généralement, si C et C_1 ont n points communs, confondus en M, c'est-à-dire, si n points distincts, communs aux deux courbes, sont venus se confondre en M, les images γ et γ_1 auront aussi en μ n points communs confondus. La réciproque est immédiate.

Ceci se modifie un peu, si M vient sur l'une des droites OI et OJ. Si la courbe C passe en M, situé sur OI, son image μ passera en I, et sa tangente en I sera encore l'intersection de P avec le plan OMT, qui devient ici le plan tangent à la quadrique en M. Donc, si deux courbes C et C_1 rencontrent OI en des points M et M_1 distincts, leurs images γ et γ_1 se coupent en I où elles ont des tangentes distinctes. Si les courbes C et C_1 viennent à se couper en M sur OI, leurs images γ et γ_1 auront $n+1$ points communs, confondus en I. La réciproque est encore immédiate.

3. En particulier, toute *génératrice* de la surface, rencontrant toujours soit OI, soit OJ, aura pour image une droite passant soit par I, pour les génératrices d'un système, soit par J, pour celles de l'autre. Il y a exception pour OI et OJ, qui passent par O, et dont les images se réduisent aux points I et J.

Réciproquement, toute droite du plan P, passant soit par I, soit par J, mais distincte de IJ, est l'image d'une génératrice de la surface.

De même, toute conique de la surface ne passant pas par O, mais rencontrant nécessairement OI et OJ, a pour image *une conique passant par les points* I *et* J. Réciproquement, *toute conique* γ *du plan* P *passant par les points* I *et* J *est l'image d'une conique de la surface;* car, si l'on considère trois points μ_1, μ_2, μ_3 de cette conique, distincts entre eux et de IJ, et les points correspondants de S, M_1, M_2, M_3, ces trois derniers points sont distincts et leur plan coupe S suivant une conique C, dont l'image, passant par μ_1, μ_2, μ_3, I et J, se confond bien avec γ.

4. *Image de l'intersection de la quadrique avec une autre quadrique.* — Considérons une autre quadrique Σ, *ne passant pas par* O, et coupant S suivant une courbe C. C'est une courbe rencontrée par chaque plan en quatre points; son image γ est donc coupée par une droite quelconque en quatre points, c'est-à-dire est du quatrième degré. De plus, chaque droite OI, OJ rencontre Σ et, par suite, C en deux points différents de O : l'image γ a donc deux points doubles en I et J.

Réciproquement, toute courbe plane, γ, de P, *du quatrième degré et ayant deux points doubles en* I *et* J, est l'image de l'intersection de S avec une autre quadrique. En effet, le fait d'avoir deux points doubles en I

et J assujettit cette courbe à six conditions linéaires (par rapport aux coefficients de son équation); une courbe du quatrième degré étant définie par quatorze conditions, γ sera donc complètement déterminée par huit de ces points, distincts de I et de J, et convenablement choisis, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_8$. Par les huit points correspondants $M_1, M_2, \ldots, M_8$ de S on peut toujours faire passer une infinité de quadriques parmi lesquelles la quadrique proposée. Chacune d'elles coupe S suivant une courbe C dont l'image, assujettie aux mêmes conditions que celles qui déterminent entièrement γ, se confond bien avec γ.

5. La question revient donc à étudier *les courbes planes du quatrième degré ayant deux points doubles en* I *et* J. Ces courbes se décomposent en même temps que les courbes C dont elles sont les images, et nous n'étudierons que ce cas. La théorie repose alors sur la remarque suivante : la courbe γ n'ayant, sur la droite IJ, d'autre point que I et J, chacune des parties en lesquelles elle se décompose devra au moins passer par l'un des points I et J, sans quoi elle ne rencontrerait la droite IJ en aucun point (réel ou imaginaire), ce qui est impossible.

Suivant l'ordre de multiplicité de ces points I et J, on pourra faire les trois hypothèses suivantes :

1° Les points I et J sont des points simples pour chacune des deux parties de la courbe;

2° L'une des parties n'a qu'un point simple, en I, par exemple; l'autre ayant aussi un point simple en I avec un point double en J;

3° L'une des parties a un point double en I sans passer par J; l'autre a un point double en J, sans passer par I.

6. *Première hypothèse.* — Dans la première suppo-

sition chacune des parties de l'image γ est rencontrée en deux points I et J par la droite IJ : la courbe γ se compose donc de *deux coniques*, ε, ε', passant chacune par I et J. La courbe C se compose donc elle-même de deux coniques E et E'.

Il y a lieu de distinguer plusieurs cas suivant la situation relative des coniques ε et ε' et leur nature. Nous supposerons d'abord qu'aucune d'elles ne se décompose.

I. Les deux coniques ε et ε' se coupent d'abord en I et J, puis en deux autres points (réels ou imaginaires) distincts, e et e'.

Alors les quadriques S et Σ *se coupent suivant deux coniques* E *et* E', lesquelles se rencontent en deux points distincts M et M'. Ces deux surfaces ont évidemment *mêmes plans tangents en* M *et* M'.

II. Les deux coniques ε et ε' se coupent en I et J, et sont tangentes en un troisième point μ. Alors S et Σ se coupent suivant *deux coniques* E *et* E' *tangentes en un point* M. On peut considérer ce cas comme un cas limite du précédent, et dire que *les deux quadriques ont deux points de contact confondus en* M.

Si l'on coupe les deux surfaces par un plan voisin du point M, on obtient deux coniques se coupant en deux points voisins situés l'un sur E, l'autre sur E'; à la limite, si le plan passe par M, les deux coniques sont tangentes : les deux surfaces sont donc bien tangentes en M.

Il y a plus, si le plan est infiniment voisin de la tangente commune MJ aux deux coniques M et M', il coupe les deux surfaces suivant deux coniques ayant quatre points d'intersection voisins. Donc, à la limite, *tout plan passant par la tangente commune* MT *coupe les deux surfaces suivant deux coniques surosculatrices*.

Remarque. — Il n'y a pas lieu de considérer le cas

où les deux coniques ε et ε' se toucheront en I ou en J. En vertu de ce que nous avons vu, cette hypothèse répond, en effet, au cas où l'un ou l'autre des points M et M' de l'un des cas précédents est situé sur l'une des droites OI ou OJ.

III. Les deux coniques ε et ε' peuvent être confondues. Les deux surfaces S et Σ ont alors en commun une seule conique E : on dit qu'*elles se coupent suivant deux coniques confondues*. En outre, toute génératrice de S, passant par un point M de E, rencontre Σ en deux points nécessairement situés sur E et, par conséquent, confondus en M : elle est donc bien tangente à Σ en M. Par suite, tout plan tangent à S en un point de E est aussi tangent à Σ; et *les deux quadriques sont tangentes en chaque point de leur conique commune.*

IV. Les coniques ε et ε' peuvent se décomposer. Nous supposerons d'abord qu'une seule d'entre elles, ε', se décompose. Elle se composera de deux droites passant nécessairement, l'une par I, l'autre par J, et se coupant en ω. Ces droites rencontrent la conique ε, l'une en μ, l'autre en μ', points que nous supposerons d'abord distincts et, par suite, différents de ω.

Dans ce cas, *les deux quadriques se coupent, d'abord suivant une conique* E, *puis, suivant deux droites,* G *et* G', *rencontrant* E *en* M *et* M', *et se coupant en un point* O. On voit par là que *les deux surfaces ont alors trois points de contact*, M, M', O.

V. Dans un cas limite du précédent, les points μ, μ' et ω peuvent se confondre. Alors l'intersection des deux surfaces se compose *d'une conique* E, *et de deux droites* G, G' *se coupant en* O *sur cette conique.*

Dans ce cas, on dit que *les deux surfaces ont trois points de contact confondus en* O. Tout plan voisin du point O coupe les deux quadriques suivant deux

coniques ayant trois points d'intersection voisins de O. A la limite, *tout plan passant par* O *coupe les deux surfaces suivant deux coniques osculatrices en* O.

VI. Enfin, supposons que chacune des coniques ε et ε' se décompose. Chacune d'elles sera formée nécessairement par deux droites passant l'une par I et l'autre par J, et se coupant en ω pour la conique ε, et en ω' pour la conique ε'. De plus, si ces deux couples de droites n'ont pas de droites communes, les deux couples se couperont aux points I et J et en deux autres points μ et μ'.

Il en résulte que *les deux quadriques* S *et* Σ *se coupent suivant quatre droites formant un quadrilatère gauche* dont les sommets sont O, O', M et M'. *Ces deux quadriques sont donc tangentes en quatre points* O, O', M, M'.

VII. Les deux coniques évanouissantes ε et ε' peuvent avoir deux droites qui se confondent, celles passant par I, par exemple; les autres droites, passant par J, rencontrent la première en ω et ω'. On peut dire alors que *les deux quadriques se coupent suivant une droite double* G *et suivant deux autres droites rencontrant celle-ci en* O *et* O'.

Tout plan tangent à S en un point quelconque de G coupe les deux surfaces d'abord suivant la droite G, puis suivant deux autres droites qui ne peuvent se couper qu'en un point de l'intersection, c'est-à-dire sur G. Par suite, *les deux surfaces sont tangentes tout le long de la droite double* G.

VIII. Les deux coniques évanouissantes peuvent se confondre. L'intersection des deux surfaces se compose alors de *deux génératrices doubles qui se rencontrent en un point* O.

Comme dans le cas précédent, *les deux surfaces sont tangentes tout le long de chacune de ces droites.* De

plus, *tout plan passant par le point* O *les coupe suivant deux coniques surosculatrices,* ces deux coniques ayant nécessairement quatre points communs confondus en O.

7. *Seconde hypothèse.* — Dans le second mode de décomposition de la courbe γ, une première partie de la courbe a un point simple en I et ne passe pas par le point J. C'est donc une courbe du premier degré, c'est-à-dire une droite δ. La seconde partie, ayant un point simple en I et un point double en J, est donc une cubique. La droite δ rencontre cette cubique en I et en deux autres points μ et μ'. *Les deux quadriques se coupent donc suivant une droite* D *et suivant une courbe du troisième ordre, qui rencontre cette droite en deux points* M *et* M'. Les deux surfaces sont donc, en outre, *tangentes en deux points* M *et* M'.

Il y a plus, si l'on se reporte à la figure plane, toute droite passant par I rencontre la cubique en deux points distincts de I; toute droite passant par J la rencontre en deux points distincts de J. Les génératrices de S, appartenant au système de D, rencontrent donc la cubique gauche en deux points, et celles de l'autre système ne la rencontrent qu'en un seul point.

Si la cubique plane vient elle-même à se décomposer, elle comprendra nécessairement une conique, et nous avons déjà étudié tous les cas où la courbe γ comprend une conique. Il n'y a donc pas lieu de s'arrêter à cette nouvelle hypothèse.

8. *Troisième hypothèse.* — Dans le troisième mode de décomposition de la courbe γ, chaque partie de la courbe est nécessairement une conique ayant un point double, I pour la première, J pour la seconde. On retrouve donc encore des cas déjà étudiés (VI, VII et VIII).

9. *Remarque.* — La méthode employée (n° 1) suppose que l'une des quadriques proposées S a deux systèmes différents de génératrices, c'est-à-dire n'est pas développable. Si les deux surfaces sont des cônes, on pourra substituer à l'une quelconque d'entre elles, une surface du réseau

$$f + \lambda\varphi = 0,$$

$f = 0$ et $\varphi = 0$ étant les équations des deux surfaces. Toute quadrique de ce réseau admet, en effet, par rapport à l'une quelconque des surfaces proposées, les *mêmes points communs* et les *mêmes contacts* que l'autre surface donnée. La méthode sera complètement en défaut dans le cas où toutes les quadriques de ce réseau sont développables. Ce cas se présente, comme le lecteur s'en convaincra aisément, lorsque les deux quadriques sont *deux cônes de même sommet* ou *deux cônes ayant une génératrice commune et même plan tangent suivant cette génératrice.*

Nous croyons que ce cas, qui échappe à notre analyse (il échappe aussi à celle de M. Kœnigs), doit, de préférence, être étudié dans une leçon complémentaire de celle-ci, qui comporterait l'étude des surfaces du réseau

$$f + \lambda\varphi = 0,$$

c'est-à-dire la recherche de toutes les quadriques passant par les points d'intersection de deux autres, et ayant, en outre, les mêmes contacts.

10. Pour résumer cette analyse, nous remarquerons que, dans tous les cas de décomposition obtenus, les deux surfaces sont tangentes au moins en deux points (sauf dans les cas II et V où l'on peut dire que ces deux points sont confondus; alors on modifie un peu l'énoncé). Ici se placerait la démonstration bien classique

et bien connue qui établit que cette condition est suffisante pour la décomposition et que nous jugeons inutile de reproduire.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Pour que l'intersection de deux quadriques se décompose, il faut et il suffit que ces deux quadriques soient tangentes au moins en deux points, distincts ou confondus* (1).

D'après cela, si les deux surfaces ont trois points de contact, leur intersection se décomposera. Elle se décomposera, en outre, suivant l'un des modes III à VIII inclus, les seuls où il y ait au moins trois points de contact.

Signalons encore les deux théorèmes suivants, qui résultent de la théorie précédente, ou que l'on peut encore démontrer directement par notre méthode :

THÉORÈME. — *Si deux quadriques ont une conique commune, elles ont aussi en commun une seconde conique.*

THÉORÈME. — *Lorsque deux quadriques se coupent suivant deux génératrices d'un même système, elles se coupent aussi suivant deux autres génératrices de l'autre système.*

Voici comment on peut les établir directement. Considérons, dans chacun de ces cas, l'image γ de l'intersection. Dans le premier cas, cette image, comprenant d'abord une première conique, en comprendra nécessairement

---

(1) Voici comment il faut modifier l'énoncé, si l'on veut préciser la signification de deux points de contact confondus : « il faut et il suffit que les deux quadriques soient tangentes, au moins en deux points, ou qu'il existe une droite, tangente en un même point à chacune des surfaces, telle que tout plan passant par cette droite coupe les deux quadriques suivant deux coniques surosculatrices ».

une seconde, ce qui établit la proposition. Dans le second cas, l'image comprendra deux droites passant par l'un des points I et J, I par exemple. Elle se complétera donc par une conique ayant un point double en J, c'est-à-dire par deux droites, images de deux génératrices, dont le système est différent de celui des deux génératrices données.

SUR LES CERCLES QUI TOUCHENT TROIS CERCLES DONNÉS OU QUI LES COUPENT SOUS UN ANGLE DONNÉ;

PAR M. MAURICE FOUCHÉ,
Agrégé de l'Université.

La méthode que je vais développer pour résoudre le problème du cercle tangent à trois cercles donnés, comparée à celle de Gergonne, présente les avantages suivants :

1° Elle s'applique sans modification au cas où les centres des trois cercles sont en ligne droite.

2° Elle donne une démonstration commode de la réciproque, c'est-à-dire qu'il est aisé de prouver que la construction indiquée fournit bien une solution du problème.

3° La construction dépend d'une circonférence auxiliaire indéterminée, ce qui permet de la varier à volonté suivant la disposition des données; elle se prête, du reste, à de légères modifications qui la rendent encore praticable dans les cas où les centres de similitude des cercles donnés sont en dehors des limites de l'épure.

4° La construction s'applique aussi bien que celle de Gergonne aux cas particuliers où un ou plusieurs des cercles donnés sont remplacés par des droites ou des

points, et dans les cas où des points figurent parmi les données elle reproduit directement la construction usuelle dont elle peut être ainsi considérée comme une généralisation.

5° Elle fournit une démonstration très aisée de ce que le problème admet toujours huit solutions réelles lorsque les trois circonférences sont extérieures, proposition qui, combinée avec la transformation par inversion, permet de faire la discussion complète.

Ces avantages sont obtenus par la considération des cercles isogonaux, c'est-à-dire qui coupent les trois cercles donnés sous un même angle et qui comprennent comme cas particuliers les cercles tangents et le cercle orthogonal ([1]).

Théorème I. — *Toute droite isogonale à deux cercles passe par l'un des centres de similitude de ces deux cercles et réciproquement; toute droite qui passe par l'un des centres de similitude de deux cercles est isogonale à ces deux cercles.*

En effet, les tangentes aux quatre points d'intersection d'une droite isogonale aux deux cercles sont deux à deux parallèles, d'où il suit que les points de contact sont homologues. La réciproque peut s'établir de la même manière, mais il convient de remarquer qu'elle n'est qu'une application du principe fondamental d'après lequel la transformation par inversion conserve les angles.

Théorème II. — *Tout cercle qui en coupe deux*

([1]) Les principales propriétés des cercles isogonaux, mais seulement pour les cercles tracés sur la sphère, dans le *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse (6e édition, t. II, p. 286).

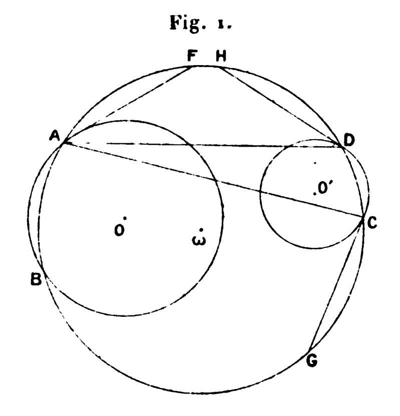
autres en deux points antihomologues est isogonal à ces deux-là.

Soit le cercle ω qui coupe les deux cercles O et O′ aux points antihomologues A et B. Transformons la figure par inversion en prenant pour pôle le centre de similitude S des deux cercles donnés et pour module le module d'inversion des deux cercles O et O′, lequel est égal au produit SA.SB et est en même temps la puissance du point S par rapport à ω. Les deux cercles O et O′ s'échangent et le cercle ω se transforme en lui-même. Comme la transformation conserve les angles, l'angle de ω avec O′, qui remplace celui de ω avec O, doit donc lui être égal.

THÉORÈME III. — *Réciproquement, quand un cercle est isogonal à deux cercles donnés, il les coupe en quatre points qui sont deux à deux antihomologues.*

Soit (*fig.* 1) le cercle ω isogonal aux deux cercles O et O′ qu'il coupe aux quatre points A, B, C, D. Joignons

Fig. 1.



A, C et A, D et supposons que la tangente en A au cercle O soit comprise dans le segment ADC et coupe l'arc AC

en F. L'arc AF, moindre qu'une demi-circonférence, mesure le double de l'angle des deux cercles. Les tangentes en C et en D au cercle O′ couperont le cercle ω en deux points G et H tels que les arcs CG et DH, moindres qu'une demi-circonférence, soient égaux à l'arc AF; ces arcs sont, du reste, dirigés en sens inverse à partir de C et D. Je considère celui qui est dirigé en sens inverse de AF, soit DH. De l'égalité des arcs AF et DH résulte celle des arcs AH et DF qui montre que les deux tangentes AF et DH coupent la droite AD sous un même angle. Donc la droite AD isogonale aux deux cercles doit passer par l'un des centres de similitude (théorème I), et, comme les tangentes en A et D aux cercles O et O′ ne sont pas parallèles, ces points A et D sont antihomologues.

Corollaire. — *Tous les cercles isogonaux à deux cercles donnés se répartissent en deux groupes tels que, par rapport à tous les cercles d'un même groupe, l'un des centres de similitude a la même puissance égale au module d'inversion des deux cercles relativement au centre de similitude considéré.*

Réciproquement, *tout cercle tel que la puissance d'un des centres de similitude de deux cercles donnés par rapport à lui est égale au module d'inversion des deux cercles donnés relativement au centre de similitude considéré est isogonal aux deux cercles fixes.*

En effet, s'il occupe l'un des cercles en A, il doit passer par le point antihomologue A′.

Remarque I. — Ces propositions permettent de généraliser la notion des cercles isogonaux et de faire rentrer sous cette dénomination des cercles qui ne coupent pas les deux cercles donnés pourvu que le centre

de similitude ait par rapport à eux la puissance convenable.

Remarque II. — Il est facile de reconnaître que les cercles isogonaux formant le groupe qui correspond au centre de similitude directe sont ceux qui coupent les deux cercles fixes de telle manière que les angles formés par les tangentes menées en l'un des points d'intersection, du *côté de l'intérieur,* sont égaux, tandis que ceux qui forment le groupe correspondant au centre de similitude inverse sont tels que les angles ainsi définis sont supplémentaires.

Les cercles orthogonaux aux deux cercles fixes appartiennent aux deux groupes à la fois, et les quatre points d'intersection sont deux à deux antihomologues par rapport aux deux centres de similitude.

Théorème IV. — *Les cercles isogonaux à trois cercles donnés se répartissent en quatre faisceaux tels que tous les cercles d'un même faisceau ont pour axe radical commun l'un des axes de similitude des trois cercles donnés.*

En effet, considérons les cercles isogonaux aux cercles O et O′ et correspondant à un centre de similitude S″, puis, parmi ceux-ci, ceux qui coupent le cercle O″ sous le même angle que les cercles O et O′. Ils peuvent se répartir en deux familles, suivant qu'ils correspondent à l'un ou l'autre des centres de similitude des cercles O et O″; si nous considérons seulement ceux qui correspondent au centre de similitude S, on voit que les points S et S″ auront la même puissance par rapport à tous ces cercles. Par conséquent, l'axe de similitude SS″ est l'axe radical commun de tous ces cercles; en faisant varier les centres de similitude, on trouve les quatre faisceaux correspondant aux quatre axes de similitude.

Réciproquement, tous les cercles d'un des quatre faisceaux définis dans l'énoncé sont isogonaux aux trois cercles donnés.

En effet, la puissance par rapport à chacun d'eux de chacun des centres de similitude S et S″ situés sur l'axe considéré étant égale au module d'inversion de deux cercles correspondant à ce centre de similitude, il suit du corollaire du théorème III que le cercle considéré coupe sous un même angle les cercles O et O′ et les cercles O et O″.

Remarque I. — Le faisceau des cercles qui admettent pour axe radical commun l'axe de similitude SS″ est tel que le centre de similitude S, en ligne droite avec les premiers, a la même puissance par rapport à tous les cercles du faisceau. Ainsi les trois centres de similitude qui correspondent à un cercle isogonal sont toujours trois centres en ligne droite. On arriverait à la même conclusion par l'application de la remarque II du théorème III. Le cercle orthogonal aux trois cercles fixes appartient aux quatre faisceaux à la fois.

Remarque II. — Si le cercle orthogonal aux trois cercles donnés est réel, on voit immédiatement que le lieu des centres des cercles isogonaux d'un même faisceau, devant contenir le centre du cercle orthogonal, sera la perpendiculaire abaissée du centre radical sur l'axe de similitude. Dans le cas général, on arrive à la même conclusion en transformant la figure par inversion avec le centre radical pour pôle, et pour module la puissance commune de ce centre par rapport aux trois cercles donnés. Alors ceux-ci se reproduisent de telle sorte que deux points antihomologues, par rapport à un centre de similitude, se transforment en deux autres points antihomologues par rapport au même

centre. Il faudra donc que les cercles isogonaux d'un même faisceau se transforment les uns dans les autres, ce qui exige que leurs centres soient alignés sur le pôle d'inversion qui est le centre radical.

Ainsi, dans tous les cas, *le lieu des centres des cercles isogonaux d'un même faisceau est la perpendiculaire abaissée du centre radical des trois cercles donnés sur l'axe de similitude correspondant.*

Remarque III. — Il résulte de ce qui précède que les cercles isogonaux d'un même faisceau se répartissent en groupes de deux qui admettent pour centre de similitude le centre radical des trois cercles donnés et qui coupent ceux-ci sous le même angle.

Remarque IV. — Si les trois cercles ont un centre de similitude commun, trois centres de similitude se confondent en ce point; l'axe de similitude correspondant est indéterminé, et le faisceau des cercles isogonaux correspondant à cet axe se réduit aux droites passant par le centre de similitude, car les points antihomologues sur les trois cercles sont nécessairement alignés sur ce centre.

Théorème V. — *Tous les cercles isogonaux à trois cercles fixes, qui appartiennent à un même faisceau, coupent l'un quelconque des cercles fixes suivant des droites qui concourent en un même point de l'axe de similitude correspondant.*

En effet, soit un cercle isogonal ω qui coupe le cercle O suivant une droite MN, laquelle rencontre l'axe de similitude correspondant en H. Le point H a la même puissance par rapport aux cercles O et ω, et quand on fait varier le cercle ω, il conserve la même puissance par rapport à ce cercle, puisqu'il appartient à l'axe radical commun des cercles ω. Donc il fait partie

de l'axe radical, c'est-à-dire de la sécante commune de tout cercle ω et du cercle O. C. Q. F. D.

Problème I. — *Trouver un cercle isogonal à trois cercles donnés correspondant à trois centres de similitude en ligne droite.*

Le problème est indéterminé. Le cercle orthogonal, s'il est réel, en donne une première solution. Pour en avoir une autre, soit A un point arbitraire de l'un des cercles donnés O. Prenons les antihomologues A′ et A″ de A sur les deux autres cercles O′ et O″, relativement aux centres de similitude considérés. Le cercle cherché passant par A devra aussi passer par A′ et A″ et, réciproquement, le cercle passant par A, A′, A″ sera isogonal aux trois cercles donnés, car, passant par A et A′, il coupe O et O′ sous le même angle et, passant par A et A″, il coupe O et O″ sous le même angle. Ainsi il suffit de tracer le cercle circonscrit au triangle A A′ A″.

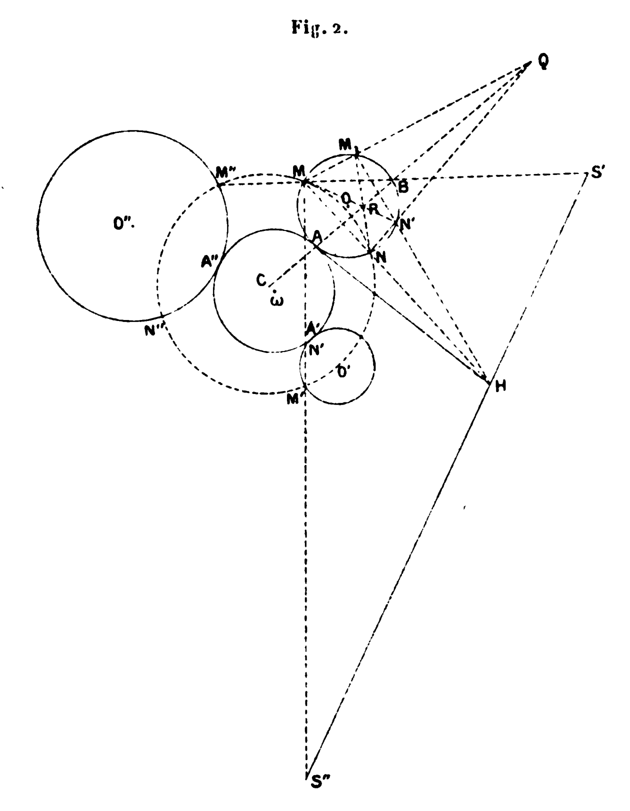
Problème II. — *Construire un cercle tangent à trois cercles donnés.*

Soit ω (*fig.* 2) le cercle cherché, tangent en A, A′, A″ aux trois cercles O, O′, O″.

Ce cercle est un cercle isogonal qui coupe les trois cercles donnés sous un angle nul. La tangente commune en A est l'axe radical des deux cercles O et ω; elle vient rencontrer l'axe de similitude correspondant en un point H par lequel passera aussi la sécante commune du cercle O et d'un cercle isogonal quelconque de la même famille, ce qui permet de le déterminer. On mènera de H une tangente HA au cercle O, puis on cherchera les points A′ et A″ antihomologues de A sur les deux autres cercles relativement aux centres de similitude qui se trouvent sur l'axe de similitude considéré. Le cercle

passant par A, A', A″ sera tangent aux trois cercles donnés. En effet, d'abord, il leur est isogonal (problème I); de plus, son axe radical avec O devant passer par H est

Fig. 2.



AH tangente à O. Donc il est lui-même tangent à AH et, par suite, à O. Alors l'angle commun d'intersection est nul et il est tangent aux trois cercles donnés.

De ce qui précède résulte la construction suivante :

On considère un axe de similitude contenant les centres de similitude S' *et* S″. *On prend sur* O *un point arbitraire* M *qu'on joint à* S' *et* S″. MS″ *coupe* O *en*

deux points dont l'un M' *est antihomologue de* M. *De même* MS' *détermine sur* O'' *un point* M'' *antihomologue de* M. *On trace le cercle circonscrit au triangle* MM'M'' *qui coupe les trois cercles donnés en trois autres points* N, N', N''. *On joint* MN *qui rencontre l'axe de similitude en* H. *De* H *on mène une tangente* HA *au cercle* O *et l'on cherche comme précédemment les points* A' *et* A'' *antihomologues de* A *sur les deux autres cercles. Le cercle circonscrit au triangle* A A' A'' *répond à la question.*

Comme on peut mener du point H deux tangentes HA, HB au cercle O, chaque axe de similitude fournit deux solutions réelles ou imaginaires, ce qui fait en tout huit solutions réelles ou imaginaires.

L'axe de similitude est déterminé d'après des règles bien connues, quand on donne à l'avance l'espèce des contacts.

Remarque I. — Si l'on veut traiter le problème directement, indépendamment de la théorie des cercles isogonaux, on commencera par remarquer que les trois points de contact A, A', A'' sont deux à deux antihomologues, puis on construira, comme dans le problème I, trois points M, M', M'', M' et M'' étant respectivement antihomologues de M sur O' et O''. On remarquera alors que, si l'on fait varier le point M, le cercle MM'M'' conserve la même puissance par rapport aux points S' et S'', de sorte que tous les cercles M, M', M'' ont le même axe radical S'S''. Il en résulte, d'après le raisonnement du théorème V, que la sécante commune MN au cercle variable MM'M'' et au cercle fixe O passe par un point fixe H de l'axe de similitude, par lequel doit aussi passer la tangente en A commune à O et ω. On retrouve ainsi la construction indiquée. Pour démontrer que le cercle ω

passant par A, A′, A″ est bien tangent aux trois cercles donnés, on remarque que l'axe radical de ω et O étant AH, ω est tangent à O en A. Alors, comme ω passe par A′ antihomologue de A, il est aussi tangent à O′ en A′, et enfin il est tangent à A″ pour une raison analogue.

Remarque II. — Si un ou plusieurs centres de similitude sont en dehors des limites de l'épure, on peut néanmoins construire les points M′, M″; il suffit de mener à O′ un rayon parallèle au rayon OM et de joindre le point M à l'extrémité de ce rayon; la droite MP coupe le cercle O′ en un second point M′ qui est antihomologue de M. Il faut seulement faire attention au sens des rayons OM et O′P′, suivant qu'on considère le centre de similitude direct ou inverse.

Si l'axe de similitude, ou simplement le point H, est en dehors des limites de l'épure, on pourra y suppléer de la manière suivante : On cherchera deux groupes de points antihomologues MM′M″, $M_1M'_1M''_1$. Les deux cercles isogonaux ainsi déterminés coupent le cercle O suivant des cordes MN, M_1N_1; on joindra MM_1 et NN_1 qui se couperont en Q, MN_1 et M_1N qui se couperont en R. La droite QR sera la polaire du point H où se coupent MN et M_1N_1 et, par suite, son intersection avec le cercle O déterminera les deux points de contact A et B.

Remarque III. — Si l'on considère les deux cercles ω et ω′ fournis par un même axe de similitude, lesquels touchent les cercles donnés en AA′A″ et BB′B″, on peut remarquer que AB, qui est la polaire de H par rapport au cercle O, contient le pôle de l'axe de similitude par rapport au même cercle. De plus les cercles ω et ω′ correspondant au même axe de similitude sont ceux qui se déduisent l'un de l'autre par une inversion effectuée du centre radical C des trois cercles donnés comme pôle

(remarque III du théorème IV). Il en résulte que les cordes AB, A′B′, A″B″ vont concourir au centre radical C. On retrouve ainsi la construction de Gergonne, qui consiste à joindre le centre radical des trois cercles donnés aux pôles de l'axe de similitude par rapport aux trois cercles donnés.

Remarque IV. —Si le cercle isogonal MM′M″ coupe l'axe de similitude en deux points réels L et L′, tous les cercles isogonaux du même faisceau passeront par ces deux points, et l'on sera ramené à faire passer par ces deux points un cercle tangent à l'un des cercles donnés. Mais, comme il est aisé de le reconnaître, le tracé de ce cercle, par la méthode classique, reproduit exactement notre construction générale.

Remarque V. — Si les trois cercles ont un centre de similitude commun, l'axe de similitude correspondant est indéterminé, et la méthode ne s'applique plus; mais alors il est clair que les solutions correspondant à ce centre de similitude sont les tangentes communes aux trois cercles.

APPLICATION DE LA MÉTHODE AUX CAS PARTICULIERS.

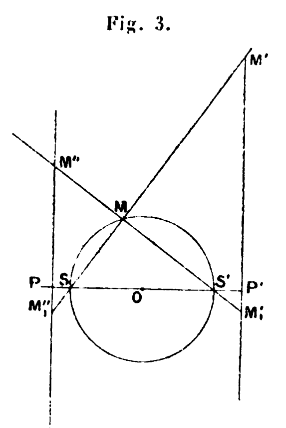
Le cas de deux cercles et d'une droite ne présente rien de particulier.

Cas de deux droites et d'un cercle.

La construction générale s'applique, mais elle donne un tracé plus compliqué que celui de la méthode de Gergonne qui consiste, dans ce cas, à circonscrire au cercle un parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux droites données et à joindre les sommets de ce parallélogramme au point d'intersection des deux droites.

Ici la méthode de Gergonne a même l'avantage de fournir une discussion plus facile que celle que donne notre méthode. On connait les résultats de cette discussion d'après lesquels le problème admet huit solutions réelles si le cercle coupe les deux droites sans passer par leur point d'intersection, et quatre si le cercle ne coupe qu'une droite ou n'en coupe aucune, ou passe par leur point d'intersection. Nous en ferons usage dans la discussion générale. Mais la méthode de Gergonne cesse d'être applicable si les deux droites sont parallèles. Soient (*fig.* 3) PQ, P′Q′ les deux droites parallèles et le cercle O. Les centres de similitude sont

Fig. 3.



en S et S′ aux extrémités du diamètre perpendiculaire aux deux droites. On peut prendre un de ces deux points S pour centre de similitude commun de O avec PQ et avec P′Q′. Alors toute droite passant par S sera isogonale aux trois lignes données; comme elle rencontre l'axe de similitude en S, S sera un point de contact. Ainsi, on trouve déjà les deux tangentes en S et S′ qui doivent être considérées comme des solutions sin-

gulières, car, dans la transformation par inversion, elles deviennent des circonférences tangentes à O et aux deux circonférences transformées de PQ et de $P'Q'$ en leur point de contact qui est le pôle d'inversion. Si l'on prend des centres de similitude différents, S et S', soit M un point arbitraire de la circonférence O, joignons SM et $S'M$ qui coupent respectivement les droites $P'Q'$, PQ, en $M'M'_1$ et M''_1M''. Les points antihomologues de M sont $M'M''$ ou $M'_1M''_1$ suivant l'attribution qu'on fera des centres de similitude S et S' aux deux droites données. Les cercles circonscrits aux deux triangles $MM'M''$, $M_1M'_1M''_1$ fourniront d'après la construction générale quatre solutions nouvelles.

La discussion, quoique un peu longue, est très aisée :

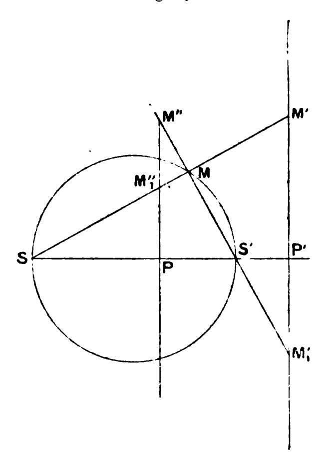
1° Si le cercle O est entre les deux parallèles et si M' et M'' sont sur les prolongements de SM et $S'M$, les points S et S' étant en dehors de la circonférence $MM'M''$, il est impossible que celle-là passe entre S et S', de sorte que son second point d'intersection N avec O est nécessairement de même côté que M, et la corde MN coupe SS' en un point H situé en dehors de O et duquel on peut mener des tangentes au cercle O. Par un raisonnement analogue, on arrive à une même conclusion pour le cercle $MM'_1M''_1$ qui contient S et S' à son intérieur. Les quatre cercles tangents sont donc réels.

2° Si le cercle O coupe l'une des trois droites, on reconnaît par un raisonnement analogue que l'un des cercles auxiliaires $MM'M''$ (*fig.* 4), qui laisse S et S' à son extérieur, donne deux solutions, tandis que l'autre $MM'_1M''_1$ passe entre S et S' et ne donne aucune solution réelle. Donc il y a deux cercles tangents.

3° Si le cercle O est en dehors des deux parallèles, le même raisonnement montre qu'il n'y a pas de cercle

tangent, ce qui est du reste évident *a priori*. Il n'y a pas d'autre solution que les deux droites.

Fig. 4.



4° Les cas limites sont trop faciles à traiter pour que nous croyions devoir insister.

Il est aisé de reconnaître que, dans les cas de *deux cercles et un point, d'un cercle, une droite et un point, d'un cercle et deux points, la construction générale reproduit la construction habituelle de ces problèmes simples, les points donnés constituant des centres de similitude.*

Théorème VI. — *Étant donnés trois cercles extérieurs deux à deux, on peut leur mener huit cercles tangents réels dont deux au plus peuvent se réduire à deux droites.*

Pour qu'un axe de similitude fournisse deux solutions réelles, il faut et il suffit que le point H situé sur cet axe (*fig.* 2) soit à l'extérieur du cercle O, ou, ce qui revient au même, à l'extérieur du segment MN, ou en-

core que l'axe de similitude ne traverse pas MN. Or l'axe ne peut traverser le segment MN sans traverser en même temps l'arc MN du cercle MM′M″ situé à l'intérieur de O et réciproquement. Donc, pour qu'un axe de similitude donne deux solutions réelles, il faut et il suffit que le cercle isogonal MM′M″ ne coupe pas l'axe de similitude correspondant, ou le coupe en deux points situés d'un même côté du cercle O.

Il résulte de cette condition que si le cercle MM′M″ coupe l'axe de similitude à l'intérieur de l'un des cercles donnés en un point unique, il le coupera aussi à l'intérieur des deux autres cercles, car O est l'un quelconque des trois cercles donnés, et la solution ne peut être à la fois réelle et imaginaire. Mais le cercle MM′M″ ne coupe l'axe qu'en deux points. Si donc cet axe ne donne aucune solution réelle il faut que l'un au moins des deux points d'intersection soit intérieur à la fois à deux des cercles donnés au moins, ce qui exige que ces deux cercles-là aient une région commune. Or cela ne peut arriver si les trois cercles donnés sont extérieurs. Donc dans ce cas toutes les solutions sont réelles. Il peut arriver que les trois cercles aient deux tangentes communes, mais ils ne sauraient en avoir trois.

DISCUSSION GÉNÉRALE.

1° *Si les circonférences n'ont aucun point commun,* il peut y avoir :

α. *Trois couples extérieurs : il y a huit solutions réelles.*

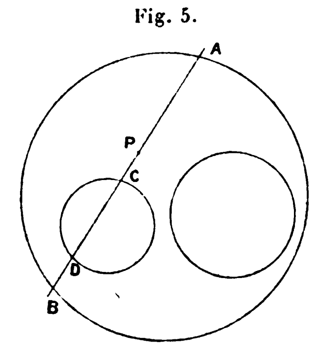
β. *Un couple intérieur et deux extérieurs,* c'est-à-dire deux cercles intérieurs et le troisième extérieur à ces deux-là. *Le problème* est manifestement *impossible.*

γ. *Deux couples intérieurs et le troisième extérieur,*

c'est-à-dire que deux des circonférences données sont à l'intérieur de la troisième, et extérieures entre elles.

Dans ce cas, en prenant pour pôle d'inversion au point P situé à l'intérieur de la grande circonférence, et à l'extérieur des petites, et pour module la puissance de ce point par rapport à la grande circonférence, on transforme les trois cercles en trois cercles extérieurs. En effet, soit (*fig.* 5) une droite tirée de P qui coupe la grande circonférence en A et B et l'une des petites en

Fig. 5.



C et D. La grande circonférence se transforme en elle-même; comme PC et PD sont tous deux plus petits que PB, les distances inverses PC′ et PD′ seront plus grandes que PA et les deux points C′ et D′ seront au delà de A.

Il en résulte que le problème admet *huit solutions réelles*. Aucune ne peut se réduire à une droite.

δ. *Trois couples intérieurs*. *Le problème* est manifestement *impossible*.

2° *Si deux des circonférences se coupent* on les transformera en droites en prenant pour pôle d'inversion l'un de leurs points d'intersection. Donc, d'après une discussion rappelée plus haut il y aura *huit solutions réelles*, si le troisième cercle coupe les deux premiers sans passer par l'un des points d'intersection, ou *quatre seu-*

lement si le troisième cercle coupe un seul de ces deux-là, ou n'en coupe aucun, ou passe par l'un de leur point d'intersection. Dans ce dernier cas, le point de concours des trois circonférences doit être considéré comme un cercle de rayon nul formant une solution quadruple. Il y a des solutions doubles s'il y a des cercles tangents. Enfin, si les trois cercles passent par deux mêmes points, ils se transforment en trois droites concourantes et le problème est impossible, ou du moins il n'admet d'autres solutions que les deux points communs qui constituent deux solutions quadruples de rayon nul.

3° *S'il y a deux cercles tangents,* le troisième ne coupant pas les deux premiers, on transformera les deux cercles tangents en deux droites parallèles en prenant le point de contact pour pôle, et l'on trouve aisément en tenant compte des deux solutions rectilignes qui donnent des cercles dans la transformation inverse. Il y a *six solutions réelles,* si, les cercles étant tangent extérieurement, le troisième leur est extérieur, ou si, étant tangents intérieurement, le troisième est intérieur au grand et extérieur au petit; *quatre solutions réelles* dans tous les autres cas. Les solutions qui passent par le point de contact doivent être considérées comme doubles. Il y a d'autres solutions doubles, si le troisième cercle est tangent à l'un des deux autres ou à tous les deux.

4° *Si enfin les trois cercles sont tangents au même point, le problème est indéterminé.*

(*A suivre.*)

NOTE SUR UN PROBLÈME D'ALGÈBRE;

PAR M. E. AMIGUES.

1. Aucun ouvrage d'Algèbre ne donne une solution simple et complète du problème suivant :

x et z étant deux racines quelconques d'une équation algébrique entière et de degré m

$$f(u)=0,$$

former une équation ayant pour racines les valeurs

$$y=\frac{\psi(x,z)}{F(x,z)},$$

$\psi(x,z)$ et $F(x,z)$ étant deux polynômes en x et en z qui n'admettent pour diviseur commun aucun polynôme en x, ni en z, ni en x et z.

Écrivons les équations

$$f(x)=0, \tag{1}$$

$$f(z)=0, \tag{2}$$

$$yF(x,z)-\psi(x,z)=0; \tag{3}$$

a, b, c, ... désignant les m racines de l'équation $f(u)=0$, si l'on élimine x entre les équations (1) et (3), on a pour résultante

$$\Pi[yF(a,z)-\psi(a,z)]=0, \tag{4}$$

Π représentant, comme d'habitude, le produit des m facteurs qui se déduisent de celui qui est écrit en remplaçant la racine a successivement par toutes les autres (c'est une des formes bien connues de la résultante).

Si maintenant on élimine x entre les équations (2)

et (4), on a de même pour résultante

$$(5)\qquad \Pi[y\,F(a,b) - \psi(a,b)] = 0,$$

le nouveau produit ayant m^2 facteurs.

Si l'on observe que l'équation (5) a pour racines toutes les racines demandées et rien que ces racines, on pourra dire que :

L'équation demandée s'obtient en éliminant x et z entre les équations (1), (2) *et* (3).

Cette solution si nette m'a été donnée par un de mes élèves, M. Weill, actuellement à l'École Polytechnique. Tirons-en les conséquences.

2. On peut se proposer d'obtenir l'équation en y, débarrassée des m racines pour lesquelles on a $x = z$.

Nous indiquerons deux moyens. Le premier est très connu. On remarque que le système (1), (2) et (3) est équivalent au système suivant, du moins pour les solutions que nous voulons conserver,

$$(6)\qquad \frac{f(x) - f(z)}{x - z} = 0,$$

$$(7)\qquad f(z) = 0,$$

$$(8)\qquad y\,F(x,z) - \psi(x,z) = 0.$$

Cela est très facile à voir, puisque $x - z \neq 0$. Si donc on élimine x et z entre ces trois dernières équations, on aura une équation en y qui donnera toutes les racines que l'on veut conserver. Pour prouver qu'elle ne donnera que ces racines, il suffit de prouver qu'on n'aura que $m(m-1)$ valeurs de y. Or l'équation (7) donne m valeurs de z, et pour chacune d'elles, l'équation (6), qui est entière et de degré $(m-1)$, donne $(m-1)$ valeurs de x.

Voici un second moyen, *qui est presque toujours pré-*

férable. On substitue au système (1), (2) et (3) le système suivant

$$(9)\qquad \frac{f(x)-f(z)}{x-z}=0,$$

$$(10)\qquad \frac{zf(x)-xf(z)}{x-z}=0,$$

$$(11)\qquad y\,\mathrm{F}(x, z)-\psi(x, z)=0.$$

On voit facilement que ces deux systèmes sont équivalents, du moins pour les valeurs différentes de x et de z. On voit aussi que les équations (9) et (10) s'obtiennent, l'une en éliminant le terme indépendant des équations (1) et (2) et divisant par $x-z$, l'autre en éliminant le terme du premier degré et divisant par $x-z$.

Il n'y a donc qu'à éliminer x et z entre les équations (9), (10), (11). L'équation en y n'aura pas de racine étrangère, car les équations (9) et (10), entières et de degrés respectifs $(m-1)$ et m, ne peuvent donner plus de $m(m-1)$ solutions.

3. Si la fraction $\frac{\psi(x, z)}{\mathrm{F}(x, z)}$ est symétrique en x et z, comme elle est irréductible, les polynômes ψ et F seront aussi symétriques. Il résulte alors de la forme donnée par M. Weill à la résultante que l'équation de degré $m(m-1)$ n'a que des racines doubles. Il est intéressant de chercher l'équation de degré $\frac{m(m-1)}{2}$ qui admet les mêmes racines.

On peut *toujours* y arriver en opérant comme il suit. On forme le système (9), (10), (11). Les premiers membres de ces équations sont des fonctions entières et symétriques de x et de z.

Posons

$$x+z=\lambda_1,$$
$$xz=\lambda_2.$$

de façon que x et z soient racines de l'équation

$$t^2 - \lambda_1 t + \lambda_2 = 0,$$

alors les premiers membres des équations (9), (10) et (11) sont fonctions entières de λ_1 et λ_2. On peut les écrire

$$f_1(\lambda_1, \lambda_2) = 0. \tag{12}$$

$$f_2(\lambda_1, \lambda_2) = 0, \tag{13}$$

$$y\varphi_1(\lambda_1, \lambda_2) - \varphi_2(\lambda_1, \lambda_2) = 0. \tag{14}$$

Les termes de f_1 sont au plus de poids $(m-1)$ et ceux de f_2 au plus de poids m.

Éliminons λ_2 entre f_1 et f_2. Si m est pair, l'équation (13) contient λ_2 à la puissance $\frac{m}{2}$ au plus. Le résultant est donc au plus de degré $\frac{m}{2}$ par rapport aux coefficients de f_1 qui sont au plus de degré $(m-1)$ en λ_1. Le résultant en λ_1 est donc au plus de degré $\frac{m(m-1)}{2}$. C'est le nombre des valeurs de λ_1, par suite le nombre d'équations en t, et enfin le nombre des valeurs de y.

Si m est impair, $(m-1)$ est pair, l'équation (12) contient λ_2 à la puissance $\frac{m-1}{2}$ au plus. Le résultant qu'on obtient en éliminant λ_2 entre (12) et (13) est donc au plus de degré $\frac{m-1}{2}$ par rapport aux coefficients de (13) qui sont au plus de degré m par rapport à λ_1; donc le résultant sera encore au plus de degré $\frac{m(m-1)}{2}$ en λ_1.

Dans les deux cas, il n'y aura pas plus de $\frac{m(m-1)}{2}$ solutions pour λ_1 et λ_2 et, par suite, d'après (14), il n'y aura pas plus de $\frac{m(m-1)}{2}$ valeurs de y.

Il résulte de là que, si l'on élimine λ_1 et λ_2 entre les

équations (12), (13), (14), on aura une équation en y de degré $\frac{m(m-1)}{2}$.

SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE;

Par M. E. VALDÈS.

I. *Propositions nouvelles sur la symédiane et le point de Lemoine.* — Soient un triangle ABC et son cercle circonscrit, K son point de Lemoine et k_a, k_b, k_c les pôles de ses symédianes, $\alpha\beta\gamma$ le triangle métaharmonique (¹) de ABC par rapport à K et $abca_1b_1c_1$ l'hexagone formé par leurs côtés.

1° L'axe d'homologie de ces deux triangles est la droite $k_ak_bk_c$, polaire de K.

2° Les diagonales de l'hexagone concourent en K et aa_1 passe par k_a, bb_1 par k_b, cc_1 par k_c.

3° Toute droite menée par l'un des points α, β, γ coupe les côtés de ABC aux points q, r, s et le cercle circonscrit en p; ces quatre points forment une division harmonique.

4° On joint un point p du cercle circonscrit aux sommets A, α.

Soient q, r, s les points où $p\alpha$ rencontre les côtés de ABC, q', r', s' les points où pA rencontre les côtés de $\alpha\beta\gamma$; les droites qq', rr', ss' se coupent sur la diagonale aa_1 de l'hexagone.

5° Les droites de Simson des triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$

(¹) Voir *Traité de Géométrie*, par MM. Rouché et de Comberousse, 6ᵉ édition; Note III, *Sur la Géométrie récente du triangle*.

relatives à un même point p rectangulaires, leur point d'intersection décrit une ellipse.

6° Le foyer singulier d'une cubique cyclique est le point de Lemoine de son triangle asymptotique.

7° La polaire d'un point, par rapport à une cubique triasymptotique, n'est un cercle que si le point choisi est le point de Lemoine de son triangle asymptotique.

8° Les parallèles aux asymptotes menées par ce point déterminent sur la cubique six points qui sont sur un cercle. (Ces deux propositions ont été énoncées par M. Lemoine pour le cas où la cubique se réduit à ses asymptotes.)

II. *Extension de quelques propriétés de la droite de Simson.* — 1° Un triangle ABC étant inscrit dans une conique, on mène par ses sommets des parallèles aux directions conjuguées aux côtés opposés; ces parallèles se coupent au point H.

2° Les milieux des côtés, les milieux de AH, BH, CH et les points de rencontre de AH, BH, CH avec les côtés du triangle, sont neuf points d'une conique U homothétique à la première; son centre est le milieu de OH, le rapport d'homothétie est $\frac{1}{2}$.

3° Si d'un point P de la conique ABC on mène des parallèles aux droites AH, BH, CH, ces parallèles rencontrent les côtés opposés à A, B, C en trois points en ligne droite.

4° Deux points P, P', diamétralement opposés, donnent lieu à deux droites dont les directions sont conjuguées, leur point d'intersection décrit la conique U.

5° Ces droites enveloppent une quartique tricuspidale, les tangentes aux points cuspidaux sont les droites AH, BH, CH.

SUR LES FIGURES ÉQUIPOLLENTES;

PAR M. G. TARRY.

1. Dans le plan, nous dirons que deux quaternes de points, A, B, C, D et A′, B′, C′, D′, ont le même rapport anharmonique lorsque les quadrangles ABCD et A′B′C′D′ satisferont aux relations exprimées par les deux égalités

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{A'C'}{A'D'} : \frac{B'C'}{B'D'},$$

$$\widehat{CAD} - \widehat{CBD} = \widehat{C'A'D'} - \widehat{C'B'D'}.$$

Pour simplifier, nous représenterons cette double égalité par la formule symbolique

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

On démontre qu'on peut remplacer ces deux quaternes par deux autres formés des mêmes points disposés dans un ordre quelconque, à la seule condition de faire correspondre les mêmes points.

Nous appellerons *figures directement équipollentes* deux figures planes qui se correspondent point à point, de telle sorte que quatre points quelconques de l'une de ces figures aient le même rapport anharmonique que les quatre points correspondants de l'autre.

La démonstration du théorème suivant, par la Géométrie pure, ne présente aucune difficulté.

Étant donné deux ternes de points, A, B, C *et* A′, B′, C′, *qui se correspondent dans deux figures* φ *et* φ', *si l'on fait correspondre à tout point* D *de* φ *un point*

D′ *de* φ' *par l'égalité*

$$(ABCD) = (A'B'C'D'),$$

à un quaterne de points quelconques dans l'une de ces figures correspond dans l'autre un quaterne de points qui a le même rapport anharmonique.

Ce qui prouve l'existence des figures directement équipollentes.

Appelons I et J′ les points de chacune des figures ABC et A′B′C′ qui correspondent aux points à l'infini ∞' et ∞ dans l'autre.

Nous donnerons à ces points les noms de *pôles d'inversion.*

On a immédiatement l'équipollence

$$(I \infty AB) = (\infty' J' A' B'),$$

c'est-à-dire les deux relations

$$\frac{IA}{IB} : \frac{\infty A}{\infty B} = \frac{\infty' A'}{\infty' B'} : \frac{J'A'}{J'B'},$$

$$\widehat{AIB} - \widehat{A \infty B} = \widehat{A' \infty' B'} - \widehat{A'J'B'}.$$

On voit immédiatement que

$$\frac{\infty A}{\infty B} = \frac{\infty' A'}{\infty' B'} = 1 \qquad \text{et} \qquad \widehat{A \infty B} = \widehat{A' \infty' B'} = 0.$$

On a donc les deux égalités

$$IA.J'A' = IB.J'B' \qquad \text{et} \qquad \widehat{AIB} = -\widehat{A'J'B'},$$

qui se traduisent géométriquement par cet énoncé :

Le produit des distances IA.J′A′ *des pôles d'inversion de deux figures directement équipollentes à deux points correspondants dans ces figures est constant, et la bissectrice des semi-droites* IA *et* J′A′ *a une direction fixe.*

Il peut arriver qu'à un point à l'infini dans l'une des figures corresponde dans l'autre un point aussi à l'infini.

Dans ce cas particulier, les deux figures sont directement semblables.

En effet, de l'équipollence

$$(A\infty BC) = (A'\infty' B'C'),$$

on déduit les égalités

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \quad \text{et} \quad \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}.$$

D'où l'on conclut que les figures directement semblables sont un cas particulier des figures directement équipollentes.

Nous appellerons *point double* de deux figures qui se correspondent point à point, tout point qui, considéré dans l'une quelconque des deux figures, se confond avec son correspondant dans l'autre.

Il est facile de voir que, dans le cas général, tout point double de deux figures directement équipollentes est le troisième sommet D d'un triangle IDJ' dans lequel on connaît la base IJ', qui a pour extrémités les pôles d'inversion, le produit des deux autres côtés, ID.J'D, et la direction de la bissectrice intérieure de l'angle D opposé à la base.

On sait que ce problème très connu a toujours deux solutions réelles, distinctes ou confondues.

Quand les pôles d'inversion I et J' se confondent, la construction des points doubles est des plus simples.

Dans le cas particulier où les pôles d'inversion sont à l'infini, les deux figures directement équipollentes deviennent directement égales, l'un des points doubles est à l'infini et l'autre est le point double, ou centre de similitude, des deux figures directement semblables.

Enfin, dans le cas plus particulier où les deux figures

sont directement égales et parallèles, de même sens, les deux points doubles sont à l'infini.

2. Deux figures planes sont dites *inversement équipollentes* quand une figure inversement semblable à l'une d'elles est directement équipollente à l'autre.

Soient A, B, C, D et A', B', C', D' des quaternes de points correspondants dans deux figures inversement équipollentes.

Il résulte immédiatement de notre définition qu'on a les deux égalités suivantes

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{A'C'}{A'D'} : \frac{B'C'}{B'D'},$$

$$\widehat{CAD} - \widehat{CBD} = -\left(\widehat{C'A'D'} - \widehat{C'B'D'}\right).$$

Nous exprimerons cette double égalité par la formule symbolique

$$(ABCD) = -(A'B'C'D').$$

Soient I et J' les points de deux figures inversement équipollentes qui correspondent aux points à l'infini.

Désignons par P et P' deux points correspondants quelconques dans ces figures.

Le produit des distances IP et J'P' est constant et l'angle formé par les semi-droites IP et J'P' a une grandeur invariable.

Les points I et J' sont les pôles d'inversion des deux figures inversement équipollentes.

On voit aisément que tout point double de deux figures inversement équipollentes est le sommet D d'un triangle IDJ' dans lequel on connaît la base IJ', qui a pour extrémités les pôles d'inversion, l'angle opposé IDJ', en grandeur et en signe, et le produit des deux autres côtés. Par suite, on connaît l'aire de ce

triangle, et la construction des points doubles est ramenée à celle d'un triangle dans lequel on donne la base, la hauteur et l'angle au sommet, en grandeur et en signe.

D'où l'on conclut que, dans le cas général, il existe deux points doubles, réels ou imaginaires conjugués.

Si les points d'inversion se confondent, les points doubles sont les points cycliques, excepté dans le cas particulier où l'angle constant des semi-droites IP et J'P' est nul.

Dans ce dernier cas les figures inversement équipollentes sont identiques aux figures étudiées sous le nom d'*inverses*, ou transformées par rayons vecteurs réciproques, et il est d'un haut intérêt de constater que dans ce cas particulier les points doubles sont en nombre infini. Le lieu géométrique de ces points doubles est une circonférence dont le centre est le pôle d'inversion commun aux deux figures.

Si au point à l'infini dans l'une des deux figures inversement équipollentes correspond le point à l'infini dans l'autre, les deux figures sont inversement semblables.

L'un des points doubles est à l'infini et l'autre est le point double des deux figures inversement semblables.

Enfin dans le cas très particulier où les deux figures inversement semblables sont inversement égales et symétriques par rapport à une droite, il existe une infinité de points doubles dont le lieu géométrique est la ligne droite, axe de symétrie.

3. Résumons ce qui concerne les points doubles.

Deux figures équipollentes situées sur un même plan possèdent, en général, deux points doubles.

Quand les figures sont directement équipollentes, les points doubles sont toujours réels et au nombre de deux, distincts ou confondus, propres ou à l'infini.

Quand les figures sont inversement équipollentes, elles ont, en général, deux points doubles, réels ou imaginaires conjugués, distincts ou confondus, propres ou à l'infini, et dans certains cas particuliers il existe une infinité de points doubles dont le lieu géométrique est une circonférence ou une droite. Ce lieu est une circonférence si les pôles d'inversion se confondent en un point propre et si, de plus, les segments correspondants issus du pôle commun sont parallèles de même sens, et le lieu est une droite quand les pôles d'inversion sont à l'infini et, en outre, les deux figures devenues inversement égales et placées en position de symétrie.

Dans deux figures équipollentes, directement ou inversement, les circonférences et les droites appartenant à l'une d'elles ont pour lignes correspondantes dans l'autre des droites ou des circonférences, suivant que les lignes de la première figure passent ou ne passent pas par le pôle d'inversion de cette figure.

4. De la définition que nous avons donnée des figures équipollentes on déduit immédiatement l'importante propriété suivante.

Deux ternes de points correspondants infiniment voisins, A, B, C *et* A′, B′, C′, *sont les sommets de deux triangles infiniment petits,* ABC *et* A′, B′, C′, *directement ou inversement semblables, suivant que les figures sont directement ou inversement équipollentes.*

En effet, de la relation

$$(\mathrm{APBC}) = \pm(\mathrm{A'P'B'C'}),$$

on déduit les égalités

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} : \frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PC}} = \frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{A'C'}} : \frac{\mathrm{P'B'}}{\mathrm{P'C'}},$$

$$\widehat{\mathrm{BAC}} - \widehat{\mathrm{BPC}} = \pm\left(\widehat{\mathrm{B'A'C'}} - \widehat{\mathrm{B'P'C'}}\right).$$

Si les triangles ABC, A′B′C′ tendent à devenir infiniment petits, les rapports $\frac{PB}{PC}$, $\frac{P'B'}{P'C'}$ tendent vers l'unité et les angles BPC, B′P′C′ vers zéro.

Donc, à la limite, les égalités précédentes peuvent être remplacées par les suivantes

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}, \qquad \widehat{BAC} = \pm \widehat{B'A'C'}.$$

Ainsi deux régions infiniment petites autour de deux points correspondants sont semblables.

Le coefficient de similitude entre deux telles régions varie d'un point à un autre. Les points de ces régions pour lesquelles ce coefficient a une grandeur donnée sont deux circonférences correspondantes, ayant pour centres les pôles d'inversion des deux figures équipollentes.

Dans la transformation équipollente les angles de la figure transformante se conservent dans la figure transformée; mais ces angles, égaux en grandeur absolue, ont des valeurs de même signe ou de signes contraires, suivant que les figures sont directement ou inversement équipollentes.

5. Ma théorie des figures équipollentes trouve son application naturelle dans la Géométrie de la sphère.

Elle fournit une solution élégante du problème suivant, que nous avons énoncé pour la première fois (*Nouvelles Annales*, t. X, p. 5*, question 1601) :

Inscrire dans une sphère donnée un polygone dont chaque côté passe par un point donné.

On s'appuiera sur le théorème suivant, dont la démonstration est aisée :

Quand deux figures tracées sur une sphère sont en

perspective, leurs projections stéréographiques sur un même plan sont deux figures inversement équipollentes.

On entrevoit déjà que la théorie des figures équipollentes permettra d'étendre aux surfaces des quadriques les propriétés qui correspondent à celles des divisions homographiques sur les coniques.

La construction du polygone inscrit dans une sphère donnée et dont les côtés passent par des points donnés est ramenée, dans notre solution, à la construction des points doubles de deux figures directement ou inversement équipollentes, suivant que le nombre de côtés du polygone est pair ou impair.

Par conséquent :

Quand le nombre de côtés est pair le problème a deux solutions, toujours réelles, ou bien une infinité de solutions.

Dans ce dernier cas, très particulier, qui se présente lorsque les deux figures directement équipollentes se confondent, un point quelconque de la sphère peut être considéré comme le sommet d'un polygone satisfaisant aux conditions de l'énoncé du problème.

Quand le nombre de côtés est impair, le problème a, en général, deux solutions, réelles ou imaginaires, et en particulier une infinité de solutions.

Dans ce dernier cas, les lieux géométriques des sommets des polygones sont des circonférences.

6. Deux figures, situées sur une même sphère, sont directement ou inversement équipollentes, quand leurs projections stéréographiques, prises d'un point de vue sur la sphère, sont deux figures directement ou inversement équipollentes :

Quand deux figures situées sur une même sphère

sont directement ou inversement équipollentes, quel que soit le point de vue choisi sur la sphère, toutes leurs projections stéréographiques sont des figures directement ou inversement équipollentes.

On voit que, pour former une figure sphérique, directement ou inversement équipollente à une figure sphérique donnée, on peut prendre arbitrairement les trois points qui correspondent à trois points désignés de la figure donnée.

Il est presque évident que deux figures équipollentes à une même figure sont équipollentes entre elles.

Une étude intéressante à faire serait celle du lieu géométrique des droites qui passent par les couples de points correspondants de deux figures équipollentes situées sur une même sphère. Les droites de cette congruence sont tellement placées dans l'espace, que, par un point quelconque non situé sur la sphère, il en passe toujours deux.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1892.

Composition de Mathématiques.

On donne une hyperbole équilatère et une circonférence (C) décrite sur une corde DD′ de cette hyperbole comme diamètre.

1° On mène dans la circonférence une corde perpendiculaire à DD′ : démontrer que la moitié de cette corde est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu aux points où elle rencontre l'hyperbole ;

2° Indiquer dans quel cas les points d'intersection de la circonférence et de l'hyperbole sont tous réels ;

3° Trouver le lieu des points de rencontre des sécantes communes à l'hyperbole et à la circonférence, lorsque la corde DD′ se déplace en restant parallèle à une direction fixe ;

4° Soient :

H un des points communs à l'hyperbole et au cercle mobile;
A le point où la tangente à la circonférence en H coupe l'hyperbole;
B le point où la tangente à l'hyperbole en H coupe la circonférence :

prouver que la droite AB passe par un point fixe.

Composition de Physique et de Chimie.

Physique. — I. Réfraction par un prisme : d'un rayon lumineux et d'un faisceau conique de rayons de très petite ouverture. (Il ne sera pas question de dispersion.)

II. Thermomètre à poids.

Chimie. — Préparations usitées dans les laboratoires et dans les arts de tous les hydracides (acides non oxygénés) indiqués dans le programme de Chimie.

(On ne demande rien sur les propriétés, analyses, etc., de ces corps.)

Calcul trigonométrique.

On donne les trois côtés d'un triangle

$$a = 58124^{m},59, \qquad b = 46571^{m},46, \qquad c = 37604^{m},18.$$

Calculer les trois angles et la surface.

Composition française.

Développer cette pensée de Pascal :

« La douceur de la gloire est si grande, qu'à quelque chose qu'on l'attache, même à la mort, on l'aime. »

Épure.

Intersection d'une sphère et d'un cylindre.

Le rayon de la sphère est de 80^{mm}. Le centre a sa projection horizontale à 90^{mm} du bord inférieur de la feuille, à 135^{mm} du bord de gauche, et à 220^{mm} de la projection verticale.

La trace horizontale du cylindre est un cercle de 60^{mm} de

rayon, et dont le centre est à 140^{mm} du bord inférieur de la feuille et à 120^{mm} du bord de droite. Les génératrices sont de front, inclinées de 60° sur le plan horizontal, et s'élèvent de droite à gauche au-dessus de ce plan.

On demande de représenter par ses projections le solide qui reste, après que l'on a enlevé de la sphère la portion qui se trouve à l'intérieur du cylindre; les parties cachées seront tracées en poids ronds.

On indiquera en traits rouges la construction d'un point quelconque et des points remarquables de l'intersection, ainsi que celle des tangentes en ces points ([1]).

Composition de langues étrangères.

Un gentilhomme, M. de Charnacé, était fort importuné de ce que la maison d'un pauvre homme, tailleur de son état, placée à peu de distance de son château, gênait sa vue. Ne pouvant déterminer cet homme à lui vendre sa maison, il le fait venir un jour et lui commande une livrée pour ses gens; mais il exige, sous prétexte qu'il est pressé, que le tailleur demeure chez lui, Charnacé, nourri et gardé à vue, jusqu'à ce que la besogne soit terminée. Pendant ce temps, il fait démolir la maison du tailleur, et la fait reporter fidèlement, telle qu'elle était, à un endroit où elle ne le gênait plus. Il renvoie enfin le tailleur, après avoir reçu et payé son ouvrage, et s'arrange pour qu'il ne parte qu'à la nuit, non sans avoir bien soupé. Le pauvre homme chercha vainement sa maison toute la nuit : le jour venu, il l'aperçut enfin, mais à une autre place, et son étonnement fut extrême en reconnaissant que c'était bien la même. Quand il eut compris, il se plaignit, mais on ne fit que rire de son aventure : il est vrai que cela se passait sous Louis XIV; on serait plus sévère aujourd'hui.

([1]) Il manque évidemment une donnée pour achever de définir la position relative de la sphère et du cylindre. E. R.

SOLUTION DE LA COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES DONNÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1892 ([1]);

PAR M. C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences.

1° La propriété en démonstration consiste évidemment à établir que, si l'on coupe l'hyperbole équilatère par deux sécantes rectangulaires, les produits des segments, à partir de l'intersection de ces sécantes, sont égaux (aux signes près).

Rapportons l'hyperbole à ses asymptotes, en prenant pour unité sa puissance. L'équipollence est

$$M = t + \frac{i}{t}.$$

En la coupant par une droite issue du point A, donné par $A \mathrel{\underset{\cdot}{=}} a\varepsilon^{\alpha}$, droite dont l'inclinaison serait θ, on a

$$a\varepsilon^{\alpha} + z\varepsilon^{\theta} = t + \frac{i}{t},$$

d'où

$$a\cos\alpha + z\cos\theta = t, \qquad a\sin\alpha + z\sin\theta = \frac{1}{t},$$

et

$$\frac{z^2}{2}\sin 2\theta + az\sin(\theta+\alpha) + \frac{a^2}{2}\sin 2\alpha - 1 = 0.$$

Le produit des segments est

$$\frac{\frac{a^2}{2}\sin 2\alpha - 1}{\sin 2\theta}$$

([1]) Voir l'énoncé, p. 259.

Si l'on change θ en $\theta + \frac{\pi}{2}$, on a le même produit, avec un signe contraire. La propriété est donc démontrée.

2° Soient $D = t + \frac{i}{t}$, $D' = t' + \frac{i}{t'}$. Pour que la circonférence de diamètre DD' coupe l'hyperbole en un point H, donné par $H = \tau + \frac{i}{\tau}$, il suffit qu'on ait

$$\frac{HD}{HD'} \parallel i,$$

ou

$$\frac{\tau + \frac{i}{\tau} - t - \frac{i}{t}}{\tau + \frac{i}{\tau} - t' - \frac{i}{t'}} = \frac{(\tau - t)\left(1 - \frac{i}{\tau t}\right)}{(\tau - t')\left(1 - \frac{i}{tt'}\right)} \parallel i,$$

c'est-à-dire

$$1 - \frac{i}{\tau t} \parallel i + \frac{1}{\tau t'},$$

$$-\frac{1}{\tau t} = \tau t', \qquad \tau^2 = -\frac{1}{\tau t'}.$$

Pour que τ soit réel, il faut donc que t, t' soient de signes contraires, ou que les deux points D, D' soient sur les deux branches différentes de l'hyperbole; τ a, d'ailleurs, deux valeurs égales et de signes contraires, ce qui montre que la seconde sécante commune HH' est un diamètre de l'hyperbole.

3° Il est clair que la droite HH' appartient au lieu cherché, lequel comprend, en outre, la ligne engendrée par le point de rencontre des droites HD, H'D'. Lorsque DD' conserve la même direction, on voit immédiatement que tt' est constant, ou qu'il en est de même de

$$\tau = \sqrt{-\frac{1}{tt'}}.$$

Or

$$HD = t - \tau + i\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\tau}\right) = (t - \tau)\left(1 - \frac{i}{t\tau}\right) \parallel 1 - \frac{i}{t\tau}.$$

De même

$$H'D' \parallel 1 - \frac{i}{t'\tau}.$$

Le lieu est donc obtenu par la relation

$$\tau + \frac{i}{\tau} + u\left(1 - \frac{i}{\tau t}\right) = -\tau - \frac{i}{\tau} + v\left(1 + \frac{i}{\tau t'}\right).$$

En appelant x et y les coordonnées d'un point du lieu, on a

$$x = \tau + u = -\tau + v,$$

$$y = \frac{1}{\tau} - \frac{u}{\tau t} = -\frac{1}{\tau} + \frac{v}{\tau t'}.$$

De là

$$x - \tau = u, \qquad x + \tau = v, \qquad x^2 - \tau^2 = uv,$$

$$y - \frac{1}{\tau} = -\frac{u}{\tau t}, \quad y + \frac{1}{\tau} = +\frac{v}{\tau t'}, \quad y^2 - \frac{1}{\tau^2} = -\frac{uv}{\tau^2 tt'} = uv.$$

Donc $x^2 - \tau^2 = y^2 - \frac{1}{\tau^2}$ est l'équation du lieu, qui est, par conséquent, une hyperbole équilatère, dont les axes sont dirigés suivant les asymptotes de l'hyperbole donnée.

4° Rapportons l'hyperbole au diamètre HH′ pris pour unité, et pour origine des inclinaisons, ce diamètre restant le même lorsque la direction de DD′ est constante.

L'équipollence de l'hyperbole est, en prenant H pour origine, et en désignant par α l'inclinaison de la tangente en H,

$$HM = M = \tfrac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - 2z}\,\varepsilon^{\alpha}\right).$$

Soit $HB = b\varepsilon^{\alpha}$; B étant sur la circonférence, nous avons

$$\frac{BH}{BH'} \parallel \frac{HA}{HH'}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}\left(z + \sqrt{z^2 - 2z}\,\varepsilon^{\alpha}\right) \parallel \frac{b\varepsilon^{\alpha}}{b\varepsilon^{\alpha} - 1},$$

$$z + \sqrt{z^2 - 2z}\,\varepsilon^{\alpha} \parallel \frac{1}{b - \varepsilon^{-\alpha}},$$

ou

$$bz - \sqrt{z^2 - 2z} + b\sqrt{z^2 - 2z}\,\varepsilon^{\alpha} - z\varepsilon^{-\alpha} \parallel 1,$$

$$b\sqrt{z^2 + 2z} + z = 0.$$

De là

$$z = \frac{2b^2}{b^2 - 1}, \qquad \sqrt{z^2 - 2z} = \frac{-2t}{b^2 - 1}$$

et

$$\text{HA} = \frac{b^2}{b^2 - 1} - \frac{b}{b^2 - 1}\varepsilon^{\alpha},$$

$$\text{H'A} = \text{HA} - \text{HH'} = \text{HA} - 1 = \frac{1 - b\varepsilon^{\alpha}}{b^2 - 1} = \frac{\text{HH'} - \text{HB}}{b^2 - 1} = \frac{\text{BH'}}{b^2 - 1}.$$

H′A et BH′ ont donc la même direction, c'est-à-dire que la droite AB passe par le point fixe H′.

On a, en outre,

$$\frac{\text{H'A}}{\text{BH'}} = \frac{1}{b^2 - 1} = \frac{\overline{\text{HH'}}^2}{\overline{\text{HB}}^2 - \overline{\text{HH'}}^2},$$

les lignes, dans cette dernière expression, étant représentées par leurs grandeurs seulement.

Si, en particulier, on a pris $\overline{\text{HB}} = \overline{\text{HH'}}$, le point A s'éloignera à l'infini; autrement dit, la tangente au cercle H′HB, en H, sera parallèle à l'une des asymptotes. Si $\overline{\text{HB}} = \overline{\text{HH'}}\sqrt{2}$, le point H′ est le milieu de AB.

Si l'on prend deux points B, B_1 symétriques par rapport à H, on aura, pour les points A, A_1 répondant aux cercles HH′B, HH′B_1, $\frac{\text{H'A}}{\text{BH'}} = \frac{\text{H'A}_1}{\text{B}_1\text{H'}}$, si bien que la corde AA_1 sera parallèle à la tangente à l'hyperbole en H.

AUTRE SOLUTION

Par M. LAROSE,
Élève à l'École Polytechnique.

I. L'enveloppe des droites divisées harmoniquement par deux coniques est une conique qui touche les huit tangentes aux deux coniques en leurs quatre points d'intersection.

Dans le cas particulier où l'une des coniques est un cercle C, l'autre une hyperbole équilatère E, la conique enveloppe Γ, étant tangente à la droite de l'infini, est une parabole. Si l'une des cordes communes DD' à C et à E est un diamètre de l'une des coniques C, la parabole Γ ayant deux tangentes parallèles se décompose en deux points : l'un à l'infini dans une direction perpendiculaire à DD', l'autre P à distance finie.

La première partie est démontrée.

On remarquera que, si HI est la seconde corde commune à C et à E, P est le pôle de HI par rapport à C et le pôle de DD' par rapport à E; de plus, HI est le diamètre conjugué dans E des cordes perpendiculaires à DD' : sa direction est donc symétrique de DD' par rapport aux axes, ce qui résulte d'ailleurs de théorèmes connus.

II. D'après cela, les points H et I seront réels si la direction DD' est comprise dans l'angle des asymptotes qui comprend E, imaginaires dans le cas contraire.

III. Lorsque DD' se déplace parallèlement, HI reste fixe, elle fait partie du lieu; les rayons HD, ID' étant également inclinés sur les axes de E, leur intersection décrira l'hyperbole équilatère qui passe par les points H et I et qui a pour asymptotes les axes de E. Dans cette hyperbole, HI est le diamètre conjugué de DD'.

IV. Cherchons combien par un point quelconque A de E passent de droites AB. Si P est le pôle dans E de la perpendiculaire élevée au milieu de HB, P est en ligne droite avec les points H et A; or P décrit le diamètre conjugué D de DD' dans E : donc par A passe une seule droite AB et B est le symétrique de H par rapport à la polaire DD' par rapport à E du point P de rencontre de HA avec O.

Ainsi l'enveloppe de AB est un point.

Appliquons la construction précédente lorsque le point A est à l'infini sur l'une des asymptotes : la droite DD' correspondante coupe la tangente en H à E sur cette asymptote et la droite AB est, dans ce cas, la parallèle à l'asymptote menée par le point I.

Le point I est donc le point fixe par lequel passent toutes les droites AB.

Remarque. — Les énoncés qui précèdent sont susceptibles de généralisations auxquelles je ne m'arrêterai pas. Il suffit de substituer, à C et à E, deux coniques telles que la conique enveloppe des droites qui les divisent harmoniquement se réduise à deux points; à la droite de l'infini on fera correspondre une droite passant par l'un de ces points.

SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES;

PAR M. DE SAINT-GERMAIN.

D'une étude intéressante insérée dans le numéro de mars 1892, M. Jamet conclut qu'une série U à termes positifs $u_0, u_1, \ldots$ est divergente quand $u_n^{\frac{1}{n^p}}$ a une limite

supérieure à l'unité, convergente si la limite est < 1, p étant un nombre positif quelconque. La première proposition est à peu près évidente; la seconde peut résulter d'une règle plus limitative, et facile à établir. Soit

$$u_n^{\frac{1}{n^p}} = 1 - \varepsilon_n;$$

je dis que U sera convergente ou divergente suivant que la limite de $\frac{n^p \varepsilon_n}{Ln}$ sera > 1 ou < 1.

Considérons la série V dont le terme général v_n est $\frac{1}{n^\alpha}$; on a

$$v_n^{\frac{1}{n^p}} = e^{-\frac{\alpha}{n^p}Ln} = 1 - \frac{\alpha Ln}{n^p} + \frac{\alpha^2 L^2 n}{2n^{2p}} e^{-\theta\frac{\alpha}{n^p}Ln};$$

la limite du produit analogue à $\frac{n^p}{Ln}\varepsilon_n$ est α; or on sait que V est convergente ou divergente suivant que α est $\gtrless 1$ et, par un raisonnement bien connu, on en déduit immédiatement la règle que j'ai indiquée. Dans le cas envisagé par M. Jamet, ε_n étant fini, la limite de notre produit serait infinie.

SUR LA GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE;

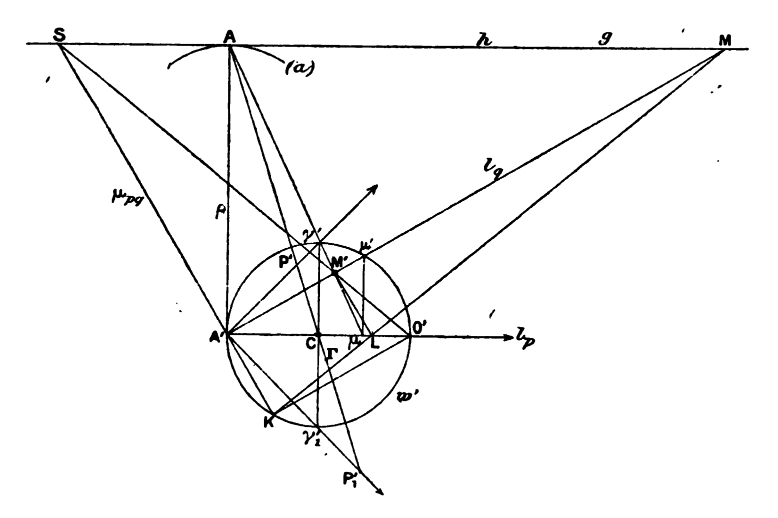
PAR M. CH. SPECKEL,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

Dans une Note insérée au Compte rendu de la dix-huitième session du Congrès pour l'avancement des Sciences, M. d'Ocagne a étudié les trajectoires des points marqués sur une droite qui se déplace en tou-

chant constamment par l'un d'eux une courbe donnée. Dans son travail, M. d'Ocagne avait abordé directement la question; dans ce qui suit, je me suis proposé d'y appliquer les méthodes générales de la Géométrie cinématique et, en même temps, de compléter sur quelques points les résultats trouvés.

Soit donc g une droite qui se déplace en restant tangente par un de ses points A à une courbe donnée (a).



Nous pouvons concevoir que, par là, se trouve défini le système d'un plan σ. Nous nous proposons de trouver, pour chaque point du plan, le centre de courbure de sa trajectoire, ainsi que les points dont la trajectoire présente quelque particularité. Nous étudierons ensuite les relations de ces points entre eux.

I. *Centre de courbure de la trajectoire d'un point de g.* — Désignons par n la normale en A à la courbe (a). Elle touche en A' la développée (a') de la courbe A. Le point A' est le centre instantané de rota-

tion à l'instant considéré. Le lieu des centres instantanés est la courbe (a'). Désignons par O' le centre de courbure de (a') pour le point A. D'après un théorème général sur les enveloppes, O' sera aussi le centre de courbure de la trajectoire du point à l'infini dans la direction perpendiculaire à n. Il suit de là donc que le point O' appartient à la *circonférence des centres* w'.

Nous pouvons donc maintenant construire cette circonférence, puisqu'elle est tangente en A' à la droite n et qu'elle passe par O'. Sa connaissance entraîne celle du *cercle des inflexions,* qui lui est symétrique par rapport au point O. La détermination de la circonférence des inflexions suffit pour qu'on puisse immédiatement obtenir les centres de courbure des trajectoires. M. le général Dewulf a, en effet, donné la règle suivante qui s'applique à tous les cas :

Le lieu géométrique des centres de courbure M' *des trajectoires des points d'une courbe* F_m *est la projection horizontale de la courbe d'intersection de deux cônes : l'un de ces cônes a pour sommet le point* Σ *pris arbitrairement sur la verticale du centre instantané; l'autre a pour sommet ce centre instantané et pour base la projection de la courbe* F_m *sur le plan horizontal passant par* Σ.

La base du cône qui a son sommet en Σ *est le cercle des centres.*

Appliquons cette construction au cas particulier que nous considérons et nous pourrons énoncer la règle suivante :

1. *Joignez* A *par une droite au point* M *pris sur* g. *Cette droite coupe en* μ' *la circonférence des centres; projetez* μ' *sur le diamètre* A'O' *en* μ; *la droite* μA *coupe* OM *au point* M'.

Je vais maintenant donner un autre mode de construction du point M', fondé, lui aussi, sur des théorèmes généraux indépendants de ceux du général Dewulf.

Cette construction repose sur le théorème suivant :

Soient l_p et l_q deux droites passant par le centre instantané; B_p et B'_p un couple de points situé sur l_p, tels que B'_p soit le centre de courbure de la trajectoire de B_p; B_q, B'_q un couple de points analogues sur l_q. Les droites $B_p B_q$, $B'_p B'_q$ se couperont sur une droite fixe u_{pq}.

La position de u_{pq} se déduit de la proposition suivante :

L'angle de la tangente n à la courbe, base de la roulette, avec l_p est égal à celui que fait u_{pq} avec l_q.

Appliquons ces propriétés aux deux rayons

$$A'O' = l_p \qquad \text{et} \qquad A'M' = l_q.$$

La droite u_{pq} est alors perpendiculaire à A'M menée par A'.

Joignons M au point à l'infini sur l_p. La droite u_{pq} rencontrera cette droite de jonction en S sur la droite g. Nous énoncerons donc la règle suivante :

2. *Menez par* A' *la droite* A'S *perpendiculaire sur* A'M. *Elle rencontre en* S *la droite g. Joignez* S *au point* O' *par une droite, le point d'intersection de cette dernière et de* A'M *est le centre de courbure cherché.*

M. d'Ocagne avait été conduit à la construction suivante du centre de courbure :

Mener par O' *une parallèle et par* A' *une perpendiculaire à* A'M. *Ces droites se coupent en* K. *Joindre* K *au point* M. *Au poiut* L *d'intersection de* KM *avec* A'O', *élever une perpendiculaire* LM' *sur* A'M. *Le point* M' *est le centre de courbure cherché.*

Il est aisé de voir que le point que l'on obtient ainsi coïncide avec celui qui a été fourni par les deux constructions précédentes.

II. *La conique de Rivals.* — C'est un théorème connu que, pour toute droite d'un système mobile qui ne passe pas par le centre instantané de rotation, le lieu des centres de courbure de ses points est une conique osculée au centre instantané par le cercle des centres.

On le vérifie ici en remarquant que les deux faisceaux qui, dans la construction n° 2, ont servi à déterminer le point M', sont projectifs. Ils sont même en involution.

Cette construction nous donne également la tangente en O', qui est O'A.

La droite qui joint le point A au milieu C de A'O' est donc conjuguée des cordes de la direction A'O'.

Achevons la détermination de la conique. Pour cela, nous allons construire son centre en cherchant les points situés sur le diamètre AC. En ces points, la tangente à la conique est parallèle à A'O'. Comme, d'autre part, elle doit passer par le point d'intersection des traces horizontales d'un plan passant par la ligne de terre et d'un plan tangent au cône A, nous avons la construction qui suit : Menez le diamètre $\gamma C' \gamma'_1$ du cercle des centres qui est perpendiculaire sur A'O'. Les points P', P'_1 d'intersection de AC avec $A'\gamma$, $A'\gamma'_1$ sont les extrémités d'un diamètre. Le centre est en Γ', milieu de $P'_1 P'$.

Nous reviendrons sur cette construction.

Déterminons la direction des axes. Pour cela, observons que, pour les points du système σ qui sont sur le cercle des inflexions, le rayon de courbure est à l'infini. Donc, en joignant le point A' aux points où la droite g rencontre le cercle des inflexions, on aura la direction

des rayons infinis : les bissectrices de l'angle de ces rayons donnent la direction des axes. On remarquera que la position de ces bissectrices est indépendante de celle de la droite g, pourvu qu'elle reste parallèle à elle-même, et que, par conséquent, les droites inclinées à 45° sur $A'O'$ nous donnent en toute hypothèse la direction des axes.

La conique, lieu des centres de courbure, a été désignée par le général Dewulf sous le nom de *conique de Rivals,* du nom du géomètre qui la remarqua le premier.

Nous dirons donc : *La conique de Rivals des points de la droite g est osculatrice en A' au cercle des centres et passe par le point O', où sa tangente est la droite $O'A$. Son centre est au point Γ', et ses axes sont inclinés à 45° sur la droite $O'A'$. L'espèce en est déterminée par la position de g relativement au cercle des inflexions.*

III. *Séries de points sur la conique de Rivals.* — Considérons le point S du plan σ comme un point dont nous cherchons le centre de courbure. Effectuons la construction n° 2; nous le trouverons en S'. Si le point M de g se déplace de façon que $A'M$ et $A'S$ restent toujours à angle droit, les faisceaux $A'(M \ldots)$, $A'(S \ldots)$ seront en involution; mais la conique de Rivals passant en A', les séries de points M' et S' situées dans cette conique seront aussi en involution. Donc, les cordes $S'M'$ passeront par un point fixe.

Nous pouvons considérer ce fait en considérant arbitrairement une involution de points sur la droite g. Soient M et S deux points conjugués de cette involution. Les faisceaux qui projettent les couples de points M et S en M' et S' sur la conique Rivals seront eux-mêmes en involution et, par contre, les cordes $M'S'$ passeront par un point fixe.

Donc : *Si* M *et* S *sont deux points conjugués d'une involution tracée sur la droite g, les cordes* S′M′ *passeront toutes par un même point.*

IV. *Variation des éléments de la conique de Rivals quand la droite g se déplace en restant parallèle à elle-même.* — La construction indiquée pour obtenir le point Γ′ nous donne immédiatement le lieu de ce point. Effectivement, les droites $A'\gamma'$ et $A'\gamma'_1$ restent fixes, ainsi que le point C. Mais le point Γ′ est le milieu de $P'P'_1$; donc, en vertu d'une propriété bien connue de l'hyperbole :

Le lieu des centres des coniques de Rivals est une hyperbole équilatère qui passe aux points C *et* A′, *et dont les asymptotes ont la direction commune des axes de toutes les coniques de Rivals.*

V. *Points à courbure stationnaire, points pour lesquels la trajectoire présente un point de rebroussement.* — Pour faire l'étude de ces points, nous calculerons l'expression du rayon de courbure. On peut, pour cela, faire usage, soit de la formule de Savary, soit opérer par un calcul direct en se servant d'une des constructions indiquées précédemment.

En posant

$$AA' = \rho \qquad \text{et} \qquad AM = h, \qquad O'A' = R,$$

on trouve

$$X = \frac{(h^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{h^2 + \rho^2 + Rh}.$$

On reconnaît au dénominateur le premier membre de l'équation du cercle des inflexions. C'est, en effet, le lieu des points qui passent par des *points d'inflexion* de leurs trajectoires.

Au numérateur, on a le premier membre de l'équation des droites isotropes issues de A'. Elles forment, en effet, le lieu des points qui passent par des *points de rebroussement* de leurs trajectoires.

On sait que le lieu des points qui ont un cercle de courbure stationnaire est une courbe de troisième degré qui passe par les points circulaires de l'infini et possède au point A' un point double dont les tangentes sont A'A et A'O. Pour obtenir l'équation de cette courbe, connaissant la relation qui lie R à ρ, il suffira de différentier l'expression de X par rapport à ρ et d'égaler cette différentielle à zéro.

Nous ferons ce calcul dans le cas où le point A décrit une développante de cercle. En négligeant le dénominateur, on a

$$\rho(h^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}(h^2+\rho^2+3Rh)=0,$$

abstraction faite du facteur $h^2+\rho^2$ dont nous connaissons la signification ; la cubique se décompose en une droite et en un cercle. Ce résultat était facile à prévoir, car, étant donnée la symétrie de la base de la roulette, la droite $\rho=0$ devait forcément faire partie du lieu, et dès lors il ne restait plus pour l'autre partie qu'un cercle tangent à A'A au point A.

Nous dirons donc :

Dans le cas où le déplacement du système est déterminé par le roulement sans glissement d'une droite sur un cercle, le lieu des points à courbure stationnaire se compose de la normale à la roulette au centre instantané, et d'un cercle tangent, en ce même point, à la roulette.

Dans ce même cas, il est facile de trouver les points qui passent par des *points d'ondulation* de leurs trajec-

toires, et le lieu de ces points pour toute la période du déplacement. Ce lieu est un cercle.

De même, les lieux des points qui, successivement, auront avec leur cercle osculateur un contact du *troisième* et du *quatrième ordre* sont des *cercles*.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COURBES PLANES UNICURSALES DU TROISIÈME ORDRE;

PAR M. ASTOR,
Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

I. On sait que si les tangentes à une cubique unicursale en son point double sont réelles, la courbe n'a qu'un point d'inflexion réel, et qu'elle en a trois si le point double est un point isolé. Cette propriété peut être mise très simplement en évidence par un procédé tout à fait élémentaire.

Nous écarterons le cas simple où le point double est un point de rebroussement, c'est-à-dire que nous supposerons les tangentes distinctes.

Prenons pour origine le point double et pour axes deux droites réelles formant avec les tangentes un faisceau harmonique. Si nous voulons que les axes soient rectangulaires, il suffira de prendre les bissectrices de l'angle des tangentes. L'équation de la courbe sera de la forme

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 = x^2 - K^2y^2,$$

K^2 étant positif si les tangentes sont réelles, négatif si elles sont imaginaires. Posons

$$(1)\qquad \begin{cases} x - Ky = X, \\ x + Ky = Y; \end{cases}$$

l'équation prend la forme

$$aX^3 + bX^2Y + cXY^2 + dY^3 = XY.$$

Coupons par la droite $Y = tX$; X et Y s'exprimeront par les formules

$$(2)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{t}{a + bt + ct^2 + dt^3}, \\[2ex] Y = \dfrac{t^2}{a + bt + ct^2 + dt^3}; \end{cases}$$

et les formules (1) donneraient x et y rationnellement en fonction de t; nous appellerons, pour abréger, le point donné par les formules (2) le point t.

L'équation de la corde qui joint deux points t, t' s'écrit

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ t & t^2 & a + bt + ct^2 + dt^3 \\ t' & t'^2 & a + bt' + ct'^2 + dt'^3 \end{vmatrix} = 0$$

ou, en effectuant et divisant par $t - t'$,

$$(3)\qquad \begin{cases} [a(t + t') + btt' - dt^2t'^2]X \\ \quad + [-a + ctt' + dtt'(t + tt')]Y - t^2 = 0; \end{cases}$$

pour avoir la tangente au point t, il suffit de faire dans (3) $t' = t$: on obtient

$$(4)\qquad (2at + bt^2 - dt^4)X + (-a + ct^2 + 2dt^3)Y - t^2 = 0.$$

Les points θ de rencontre de la droite (4) avec la courbe seront fournis par l'équation

$$\begin{aligned} (2at + bt^2 - dt^4)\theta + (-a + ct^2 + 2dt^3)\theta^2 \\ - t^2(a + b\theta + c\theta^2 + d\theta^3) = 0; \end{aligned}$$

cette équation doit admettre la solution double $\theta = t$, ce que l'on vérifie aisément en ordonnant son premier membre par rapport à a, b, c, d, et divisant par $(\theta - t)^2$;

il reste l'équation

(5) $$a + dt^2\theta = 0.$$

Pour que le point t soit un point d'inflexion, il faut et il suffit que la valeur de θ donnée par (5) soit égale à t; c'est-à-dire que les points d'inflexion soient donnés par l'équation

(6) $$a + dt^3 = 0.$$

On vérifie d'abord bien aisément que ces trois points sont en ligne droite; car si nous coupons la courbe par la droite

$$m\mathrm{X} + n\mathrm{Y} + p = 0,$$

les coordonnées t des points de rencontre satisfont à l'équation

(7) $$mt + nt^2 + p(a + bt + ct^2 + dt^3) = 0,$$

et l'on identifiera (6) et (7) en posant

$$m + pb = 0, \qquad n + pc = 0,$$

c'est-à-dire que les trois points d'inflexion sont sur la droite

$$b\mathrm{X} + c\mathrm{Y} - 1 = 0$$

ou

(8) $$(b + c)x + \mathrm{K}(c - b)y = 1.$$

Or, si l'on forme les expressions des coefficients a, b, c, d, on trouve

(9) $$\left\{\begin{aligned} 8a &= \mathrm{A} - \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{K}} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{K}^2} - \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{K}^3}, \\ 8b &= 3\mathrm{A} - \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{K}} - \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{K}^2} + \frac{3\mathrm{D}}{\mathrm{K}^3}, \\ 8c &= 3\mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{K}} - \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{K}^2} - \frac{3\mathrm{D}}{\mathrm{K}^3}, \\ 8d &= \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{K}} + \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{K}^2} + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{K}^3}, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire que si K^2 est < 0, a et d, b et c, sont deux à deux imaginaires conjugués, et l'équation (8) devient

$$(10)\qquad \left(3A - \frac{C}{K^2}\right)x + \left(B - \frac{3D}{K^2}\right)y = 4,$$

équation d'une droite toujours réelle si la cubique elle-même est réelle, comme on devait s'y attendre.

Si K^2 est > 0, l'équation (6) n'a qu'une racine réelle et comme les formules (2) ne donnent dans ce cas des points réels que pour des valeurs réelles de t, un seul point d'inflexion est réel.

Si K^2 est < 0, remplaçons K par Ki, alors a et d sont imaginaires conjugués, de sorte que leur quotient est une imaginaire de module égal à 1. Si nous posons

$$-\frac{a}{d} = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha,$$

les trois racines de (6) seront

$$\cos\alpha + i\sin\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right),$$
$$\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right).$$

L'équation $Y = tX$ revient à

$$K\frac{y}{x} = i\,\frac{1-t}{1+t};$$

formons la valeur du second membre pour

$$t = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

par exemple ; ce sera

$$i\,\frac{1-\cos\alpha - i\sin\alpha}{1+\cos\alpha + i\sin\alpha} = i\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2} - i\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}}$$
$$= -i^2\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2} = \mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2};$$

de sorte que les trois droites joignant le point double aux points d'inflexion sont réelles, et il en est de même des points d'inflexion dont nous aurons individuellement les coordonnées.

II. L'équation (5) peut être envisagée à un autre point de vue qui permet d'en déduire quelques conséquences intéressantes. Supposons que du point θ pris sur la courbe on veuille lui mener les deux tangentes distinctes de celle qui a son point de contact en θ et qui correspond à la racine double supprimée ; les deux points de contact ont leurs coordonnées t et t' données par l'équation (5), d'où l'on déduit

$$t + t' = 0, \qquad tt' = \frac{a}{d\theta},$$

et l'équation de la corde qui joint ces deux points de contact s'obtiendra en remplaçant dans (3) $t + t'$ et tt' par ces valeurs. Elle sera donc, après simplification,

$$(b\theta - a)\,X + \theta\,(c - d\theta)\,Y - \theta = 0;$$

on peut l'écrire

$$(11) \qquad aX - (bX + cY - 1)\,\theta + dY\theta^2 = 0,$$

et l'on voit qu'elle enveloppe la conique

$$(12) \qquad (bX + cY - 1)^2 - 4adXY = 0$$

quand le point d'où l'on mène les tangentes parcourt la courbe. Cette conique est inscrite à l'angle formé par les tangentes au point double, aux points où elles sont coupées par la droite des inflexions. Si les tangentes sont les droites isotropes, le point double, qui est alors un foyer de la cubique, est aussi un foyer de la conique et la droite des inflexions est la directrice correspondante.

La conique (12) sera une parabole si l'on a

$$ad\,(bc - ad) = 0.$$

Comme ad ne peut être nul, la cubique étant supposée indécomposable, on doit avoir

$$bc - ad = 0,$$

ou, en remplaçant a, b, c, d par leurs valeurs et simplifiant,

$$(13)\qquad A^2 - \frac{AC}{K^2} + \frac{BD}{K^4} - \frac{D^2}{K^6} = 0.$$

Cette relation (13) exprime, comme il est facile de le voir, que deux des directions asymptotiques déterminées par l'équation

$$Ax^3 + Bx^2y + Cx^2y + Dy^3 = 0$$

et les tangentes

$$x^2 - K^2y^2 = 0;$$

forment un faisceau harmonique; mais cela se voit encore plus simplement comme conséquence de la relation sous la forme

$$ad - bc = 0.$$

Écrivons en effet cette dernière

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = \lambda$$

d'où

$$c = a\lambda, \qquad d = b\lambda;$$

l'équation de la courbe devient

$$(aX + bY)(X^2 + \lambda Y^2) = XY,$$

ce qui démontre la proposition.

On a donc ce théorème général :

Si dans une cubique unicursale les tangentes au point double et deux directions asymptotiques forment un faisceau harmonique, la corde polaire d'un point de la cubique enveloppe une parabole inscrite à l'angle des tangentes aux points où elles sont coupées par la droite des inflexions.

Nous pouvons remarquer en passant que, si nous connaissons les rapports de trois des quantités A, B, C, D à la quatrième, c'est-à-dire les directions asymptotiques de la courbe, nous pourrons déterminer K^2 par l'équation (13) de façon que la conique (12) soit une parabole, et la forme de l'équation montre qu'il y aura toujours une valeur réelle pour K. Si l'on multiplie A, B, C, D par un facteur arbitraire λ, on obtiendra une infinité de courbes homothétiques qui jouissent de la même propriété. Les paraboles qui leur correspondent sont également homothétiques.

Quelques cas particuliers sont intéressants à examiner.

1° Les tangentes sont rectangulaires, ou $K^2 = 1$; la relation (13) devient

$$(14) \qquad A(A - C) + D(B - D) = 0.$$

Prenons, comme nous pouvons toujours le faire, l'axe des y parallèle à une direction asymptotique, car il y en a toujours au moins une réelle; alors $D = 0$, et (14) devient

$$(15) \qquad A(A - C) = 0.$$

Nous pouvons satisfaire à cette équation de deux façons en prenant $A = 0$, ou $A = C$, et nous avons les

deux formes correspondantes d'équations qui suivent

$$xy\,(mx+ny)=\alpha\,(x^2-y^2),$$
$$x\,(x^2+y^2+2\lambda xy)=\alpha\,(x^2-y^2);$$

la première correspond à des cubiques dont les trois asymptotes sont réelles, tandis que deux d'entre elles peuvent être imaginaires avec la seconde forme. Cette dernière comprend toutes les strophoïdes que l'on obtient en faisant $\lambda=\cos\theta$, θ étant l'angle des deux droites qui servent à définir la strophoïde.

Supposons maintenant $K^2=-1$; l'équation (13) devient

$$A\,(A+C)+D\,(B+D)=0.$$

Si $D=0$, on peut prendre $A=0$ ou $A+C=0$, et on a les deux formes

$$xy\,(mx+ny)=\alpha\,(x^2+y^2),$$
$$x\,(x^2+2\lambda xy-y^2)=\alpha\,(x^2+y^2).$$

Si les axes sont obliques, nous n'avons pas grand'chose à ajouter à ce qui a été dit; mais il n'en sera pas de même si les axes sont rectangulaires, c'est-à-dire si l'origine est un foyer de la cubique. Dans ce cas, on pourra prendre pour axes deux droites rectangulaires quelconques et par suite satisfaire à la condition $D=0$; les deux formes d'équation sont équivalentes et expriment que deux asymptotes sont rectangulaires, et le théorème énoncé plus haut devient le suivant :

Si une cubique unicursale dont le point double est un foyer à deux directions asymptotiques rectangulaires, la corde polaire d'un point de la cubique enveloppe une parabole ayant pour foyer le point double et pour directrice correspondante la droite des inflexions.

III. L'équation (5) se prête aisément, par sa forme seule, à la démonstration de propriétés intéressantes des cubiques unicursales.

Les coordonnées t et t' des points de contact des tangentes menées d'un point θ de la courbe ayant une somme nulle, les rayons qui joignent ces points de contact au point double et les tangentes en ce dernier point forment un faisceau harmonique. En d'autres termes, ces rayons et les tangentes forment un faisceau en involution dont les tangentes sont les rayons doubles. Si ces tangentes sont les droites isotropes, deux rayons conjugués sont rectangulaires; on voit donc que, si le point double d'une cubique unicursale en est un foyer, la corde qui joint les points de contact des tangentes menées à la courbe par un quelconque de ses points est vue du foyer sous un angle droit. Le calcul montre tout aussi aisément cette propriété. Supposons les axes rectangulaires; les coordonnées t, t' des points de contact des tangentes menées du point θ sont données par l'équation

$$a + d\theta t^2 = 0.$$

L'équation de la droite joignant l'origine au point t est

$$y = tX \qquad \text{ou} \qquad x + Ky = t(x - Ky);$$

son coefficient angulaire est $\frac{t-1}{K(t+1)}$; la condition pour que les deux rayons correspondant à t et t' soient rectangulaires sera

$$(t-1)(t'-1) + K^2(t+1)(t'+1) = 0,$$

ou, en tenant compte de $t + t' = 0$, $tt' = \frac{a}{d\theta}$,

$$(1 + K^2)\left(\frac{a}{d\theta} + 1\right) = 0.$$

Si $1 + K^2$ n'est point nul, il n'y a qu'un seul point θ répondant à la question, savoir $\theta = -\frac{a}{d}$; mais, si $1 + K^2 = 0$, la relation de perpendicularité est toujours satisfaite, et on retrouve le résultat précédemment indiqué.

Nous avons vu que les cubiques, dont deux directions asymptotiques forment avec les tangentes au point double un faisceau harmonique, jouissent de cette propriété que les cordes polaires de leurs points enveloppent une parabole; elles jouissent aussi d'une autre propriété remarquable, c'est que les milieux de ces cordes sont en ligne droite. Cherchons, pour le démontrer, le lieu de ces milieux pour une quelconque des cubiques de la question.

Du point θ menons les tangentes; soient t, t', x, y, x', y', X, Y, X', Y' les coordonnées respectives des points de contact, $x_1 y_1$, $X_1 Y_1$ celles du milieu; nous aurons

$$2x_1 = x + x',$$
$$2y_1 = y + y';$$

donc

$$2(x_1 - Ky_1) = 2X_1 = X + X'$$
$$2(x_1 + Ky_1) = 2Y_1 = Y + Y'.$$

Par suite

$$2X_1 = \frac{t}{a + bt + ct^2 + dt^3} + \frac{t'}{a + bt' + ct'^2 + dt'^3},$$

$$2Y_1 = \frac{t^2}{a + bt + ct^2 + dt^3} + \frac{t'^2}{a + bt' + ct'^2 + dt'^3},$$

t et t' étant les racines de l'équation

$$a + d\theta t^2 = 0.$$

Comme $t' = -t$, nous pourrons écrire

$$2X_1 = \frac{t[a+ct^2-t(b+dt^2)] - t[a+ct^2+t(b+dt^2)]}{(a+ct^2)^2 - t^2(b+dt^2)^2}$$
$$= \frac{-2t^2(b+dt^2)}{(a+ct^2)^2 - t^2(b+dt^2)^2},$$
$$2Y_1 = \frac{t^2[a+ct^2-t(b+dt^2)] + t^2[a+ct^2+t(b+dt^2)]}{(a+ct^2)^2 - t^2(b+dt^2)^2}$$
$$= \frac{2t^2(a+ct^2)}{(a+ct^2)^2 - t^2(b+dt^2)^2}.$$

Remplaçant t^2 par $\frac{-a}{d\theta}$ et réduisant, on trouve

$$(16)\quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{d\theta(b\theta - a)}{a\theta(d\theta - c)^2 + d(b\theta - a)^2}, \\ Y_1 = \dfrac{-a\theta(d\theta - c)}{a\theta(d\theta - c)^2 + d(b\theta - a)^2}. \end{cases}$$

Le lieu du milieu est donc en général une courbe unicursale du troisième ordre, comme la proposée; mais supposons $ad = bc = 0$, ou

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a};$$

divisons les deux équations membre à membre, il vient

$$\frac{Y_1}{X_1} = -\frac{a}{d}\frac{d\theta - c}{b\theta - a}$$

et comme $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$,

$$\frac{Y_1}{X_1} = -\frac{a}{b} \qquad \text{ou} \qquad aX_1 + bY_1 = 0;$$

mais nous avons vu que dans ce cas l'équation de la courbe peut s'écrire

$$(aX + bY)(X^2 + \lambda Y^2) = XY,$$

de sorte que le lieu du milieu est la parallèle à la troisième asymptote menée par l'origine.

Nous avons donc le théorème suivant :

Si deux directions asymptotiques d'une cubique unicursale forment avec les tangentes au point double un faisceau harmonique, la corde polaire d'un point de la courbe enveloppe une parabole et le milieu de cette corde décrit la parallèle à la troisième asymptote menée par le point double. C'est le cas de toutes les cubiques dont le point double est un foyer et dont deux asymptotes sont rectangulaires, ou de même de celles dont les tangentes au point double sont rectangulaires et dont les droites isotropes sont deux directions asymptotiques, comme cela arrive pour les strophoïdes droites ou obliques.

Un autre cas intéressant est celui où la droite des inflexions est à l'infini, c'est-à-dire où $b = c = 0$. Dans ce cas la conique (12) a son centre au point double et pour asymptotes les tangentes en ce point. C'est une hyperbole si ces tangentes sont réelles, une ellipse, en général, si elles sont imaginaires, un cercle quand le point double est un foyer de la cubique.

De plus on a dans ce cas, par les formules (16),

$$X_1 = \frac{-\theta}{a + d\theta^3}, \qquad Y_1 = \frac{-\theta^2}{a + d\theta^3};$$

c'est-à-dire que le point $X_1 Y_1$ est le symétrique par rapport à l'origine du point θ d'où l'on a mené les tangentes; le lieu du milieu de la corde polaire est donc la cubique que l'on a fait tourner de 180° autour du point double. C'est le cas, par exemple, du folium de Descartes et, en général, de toutes les courbes dont l'équation serait

de la forme

$$ax^3 + dy^3 = xy,$$

car rien ne nous empêche dans nos calculs de supposer que X et Y représentent les coordonnées x et y elles-mêmes si l'équation a la forme

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dx^3 = xy$$

qu'on peut lui donner quand les tangentes au point double sont réelles.

Les conditions $b = 0$, $c = 0$ donnent, en se reportant aux formules (9),

$$C = 3AK^2, \quad B = \frac{3D}{K^2}$$

et l'équation générale des cubiques correspondantes devient

$$Ax^3 + \frac{3D}{K^2}x^2y + 3AK^2xy^2 + Dy = x^2 - K^2y^2.$$

Si l'on suppose les axes rectangulaires et $K^2 = -1$, c'est-à-dire si le point double est un foyer, cette équation devient

$$Ax^3 - 3Dx^2y - 3Axy^2 + Dy^3 = x^2 + y^2.$$

Les trois directions asymptotiques formant, comme il est aisé de le voir, un triangle équilatéral, la cubique a le point double pour foyer et trois axes de symétrie passant par ce foyer. Comme on peut prendre pour axes deux droites rectangulaires quelconques, on pourra supposer $D = 0$, et l'équation prendra la forme particulière

$$x(x^2 - 3y^2) = \lambda(x^2 + y^2).$$

La corde enveloppe un cercle et son milieu décrit une courbe symétrique de la cubique par rapport à son foyer.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Peano à M. Brisse.

Dans le fascicule de mars des *Nouvelles Annales*, on trouve une démonstration de M. Laurent, qui n'est pas valable.

En effet, la quantité

$$\frac{(1.2\ldots n)^2\pi^{2n}}{1.2.3\ldots(2n+2)}$$

pour $n=\infty$ a pour limite l'∞ et non o comme a dit l'auteur. Car si n croît d'une unité, la quantité en question devient multipliée par $\frac{(n+1)^2\pi^2}{(2n+3)(2n+4)}$, quantité toujours plus grande de l'unité, et qui, pour $n=\infty$, a pour limite $\frac{\pi^2}{4}>1$.

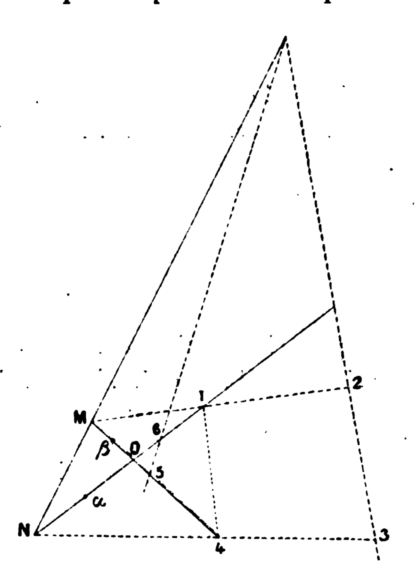
CONSTRUCTION DU DIXIÈME POINT D'UNE QUADRIQUE;

PAR M. L. RAVIER.

Nous commencerons par démontrer le théorème de Pascal de la manière suivante :

Soient 1, 2, 3, 4, 5 cinq points d'une conique, 6 un sixième point inconnu situé sur une droite donnée 16. Faisons abstraction du point 5, et considérons toutes les coniques passant par les points 1, 2, 3, 4. Ces coniques coupent 4-5 et 1-6 en des points β, α qui décrivent

des divisions homographiques. (A un point α correspond un seul point β et réciproquement.) Or le point O se correspond à lui-même dans les deux divisions; donc la droite $\alpha\beta$ passe par un point fixe. Ce point fixe est sur



2-3 (conique 1-4, 2-3) et sur MN (conique 1-2, 3-4). Donc 5-6 passe par le point de rencontre de MN et 2 3. C'est le théorème de Pascal.

Ce raisonnement s'applique aux quadriques.

Soient 1, 2, ..., 8, 9 les neuf points donnés; 10 le point inconnu. Faisons abstraction des deux points 9 et 10, et considérons toutes les quadriques passant par 1, 2, 3, ..., 8, ces quadriques déterminent des divisions homographiques sur 1-9 et 2-10. On est ramené à trouver trois couples de points de ces divisions homographiques : il s'agit donc de prendre les intersections de 1-9 et 2-10 avec trois quadriques arbitrairement choisies qui passent par les points 1, 2, ..., 8. Pour dé-

terminer l'une de ces quadriques, nous pouvons nous en donner un point quelconque; supposons que ce point soit sur 2-3, nous serons ramenés à trouver le 2[d] point d'intersection d'une droite avec une quadrique passant par un point connu de cette droite, par cinq points donnés, et ayant pour génératrice une droite donnée.

Pour résoudre ce problème nous ferons comme pour le problème précédent : Faisons abstraction de l'un des points, par exemple de 8. Les quadriques passant par 1, 2, 3, ..., 7 et ayant 2-3 pour génératrice déterminent sur 1-9 et 1-8 des divisions homographiques. Ces divisions seront déterminées si nous en connaissons trois couples de points correspondants. Il s'agit donc de prendre les intersections de 1-8 et 1-9 avec trois quadriques arbitrairement choisies qui passent par 1, 2, 3, ..., 7 et admettent 2-3 pour génératrice.

Pour déterminer l'une de ces quadriques nous pouvons nous en donner un point quelconque. Supposons que ce point soit sur 4-5, nous serons ramenés à trouver l'intersection d'une droite avec une quadrique passant par un point connu de cette droite, par trois points donnés et ayant pour génératrices deux droites données; problème fort simple.

SUR L'ÉLIMINATION;

PAR M. WORONTZOFF.

Soient

$$(1)\quad \begin{cases} F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \\ f(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m = 0, \\ \qquad (m \leq n) \end{cases}$$

deux équations algébriques dont les racines sont respectivement $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$. En posant, pour abréger,

$$(2) \qquad a_0 r^p + a_1 r^{p-1} + \ldots + a_{p-1} r + a_p = F_p(r),$$
$$(3) \qquad b_0 r^q + b_1 r^{q-1} + \ldots + b_{q-1} r + b_q = f_q(r),$$
$$F_0(r) x^{n-1} + F_1(r) x^{n-2} + \ldots + F_{n-2}(r) x + F_{n-1}(r) = \Phi(x, r),$$
$$f_0(r) x^{m-1} + f_1(r) x^{m-2} + \ldots + f_{m-2}(r) x + f_{m-1}(r) = \varphi(x, r),$$

au moyen des formules

$$\begin{aligned} F(x) - F(r) &= (x-r)\left[a_0 \frac{(x^n - r^n)}{x-r} + a_1 \frac{(x^{n-1} - r^{n-1})}{x-r} + \ldots \right. \\ &\qquad \left. + a_{n-2} \frac{(x^2 - r^2)}{x-r} + a_{n-1}\right] \text{ [1]} \\ &= (x-r)[F_0(r) x^{n-1} + F_1(r) x^{n-2} + \ldots \\ &\qquad + F_{n-2}(r) x + F_{n-1}(r)] \\ &= (x-r)\Phi(x, r), \\ f(x) - f(r) &= (x-r)[f_0(r) x^{m-1} + f_1(r) x^{m-2} + \ldots \\ &\qquad + f_{m-2}(r) x + f_{m-1}(r)] \\ &= (x-r)\varphi(x, r), \end{aligned}$$

on obtient, pour toutes les valeurs de x et de r,

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{F(x) - F(r)}{f(x) - f(r)} \\ &\quad = \frac{F_0(r) x^{n-1} + F_1(r) x^{n-2} + \ldots + F_{n-2}(r) x + F_{n-1}(r)}{f_0(r) x^{m-1} + f_1(r) x^{m-2} + \ldots + f_{m-2}(r) x + f_{m-1}(r)} \\ &\quad = \frac{\Phi(x, r)}{\varphi(x, r)} \end{aligned} \right.$$

ou

$$(5) \quad F(x)\varphi(x, r) - f(x)\Phi(x, r) = F(r)\varphi(x, r) - f(r)\Phi(x, r),$$

ou, en comparant les coefficients des mêmes puissances

---

[1] Ou
$$F(x) - F(r) = (x-r) F'(r) + \frac{(x-r)^2}{1.2} F''(r) + \ldots + \frac{(x-r)^n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(r).$$

de x, dans les deux membres de l'égalité précédente (5),

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
& a_0[-f_0(r)] + b_0 F_0(r) = 0, \\
& a_1[-f_0(r)] + a_0[-f_1(r)] + b_1 F_0(r) + b_0 F_1(r) = 0, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
& \sum_{k=0}^{k=h} a_{h-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=h} b_{h-k} F_k(r) = 0, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
& \sum_{k=0}^{k=m-1} a_{m-1-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=m-1} b_{m-1-k} F_k(r) = 0, \\
& \sum_{k=0}^{k=m-1} a_{m-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=m} b_{m-k} F_k(r) = F_0(r) f(r), \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
& \sum_{k=0}^{k=m-1} a_{m+i-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=m} b_{m-k} F_{i+k}(r) = F_i(r) f(r), \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
& \sum_{k=0}^{k=m-1} a_{n-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=m-1} b_{m-k} F_{n-m+k}(r) \\
& \qquad = F_{n-m}(r) f(r) - f_0(r) F(r), \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
& \sum_{k=h}^{k=m-1} a_{n+h-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=h}^{k=m-1} b_{m+h-k} F_{n-m+k}(r) \\
& \qquad = F_{n-m+h}(r) f(r) - f_h(r) F(r), \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
& a_n[-f_{m-2}(r)] + a_{n-1}[-f_{m-1}(r)] \\
& \qquad + b_m F_{n-2}(r) + b_{m-1} F_{n-1}(r) \\
& \qquad = f(r) F_{n-2}(r) - f_{m-2}(r) F(r), \\
& a_n[-f_{m-1}(r)] + b_m F_{n-1}(r) \\
& \qquad = F_{n-1}(r) f(r) - f_{m-1}(r) F(r),
\end{aligned}
\right.
$$

où

$$h = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1; \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-m-1.$$

Si les équations données (1) ont une racine commune

et si $x_1 = x'_1 = r$ est cette racine, on aura alors, dans la formule (5), quel que soit x,

$$\begin{gathered}
F(r) = 0, \qquad f(r) = 0, \\
F(r)\,\varphi(x, r) = 0, \qquad f(r)\,\Phi(x, r) = 0, \\
F(r)\,\varphi(x, r) - f(r)\,\Phi(x, r) = 0, \\
F(x)\,\varphi(x, r) - f(x)\,\Phi(x, r) = 0;
\end{gathered}$$

ou, dans les équations (6),

$$(7) \qquad F(r) = 0, \qquad f(r) = 0;$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{llll}
F(r) = 0, & r\,F(r) = 0, & \ldots, & r^{m-1}\,F(r) = 0, \\
f(r) = 0, & r\,f(r) = 0, & \ldots, & r^{n-1}\,f(r) = 0, \\
f(r) = 0, & r\,f(r) = 0, & \ldots, & r^{n-m-1}\,f(r) = 0,
\end{array} \right.$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l}
F_0(r)\,r^{n-m} f(r) - f_0(r)\,F(r) = 0, \\
F_1(r)\,r^{n-m} f(r) - f_1(r)\,F(r) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
F_{m-1}(r)\,r^{n-m} f(r) - f_{m-1}(r)\,F(r) = 0;
\end{array} \right.$$

et

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l}
a_0[-f_0(r)] + b_0\,F_0(r) = 0, \\
a_1[-f_0(r)] + a_0[-f_1(r)] + b_1\,F_0(r) + b_0\,F_1(r) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\sum_{k=0}^{k=h} a_{h-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=h} b_{h-k}\,F_k(r) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\sum_{k=0}^{k=m-1} a_{m+i-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=m} b_{m-k}\,F_{i+k}(r) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\sum_{k=h}^{k=m-1} a_{n+h-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=h}^{k=m-1} b_{m+h-k}\,F_{n-m+k}(r) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_n[-f_{m-2}(r)] + a_{n-1}[-f_{m-1}(r)] \\
\qquad + b_m\,F_{n-2}(r) + b_{m-1}\,F_{n-1}(r) = 0, \\
a_n[-f_{m-1}(r) + b_m\,F_{n-1}(r) = 0,
\end{array} \right.$$

où

$$h = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1; \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-m-1.$$

Réciproquement, si l'on suppose, dans la formule (5), pour toutes les valeurs de x,

$$(11) \qquad F(x)\varphi(x, r) - f(x)\Phi(x, r) = 0,$$

ou

$$(12) \qquad F(r)\varphi(x, r) - f(r)\Phi(x, r) = 0,$$

ou

$$(13) \qquad F(r)\varphi(x, r) = 0, \qquad f(r)\Phi(x, r) = 0,$$

ou enfin

$$(14) \qquad F(r) = 0, \qquad f(r) = 0,$$

les équations proposées (1) auront alors une racine commune r. Considérons séparément chacune des quatre conditions précédentes (11), (12), (13), (14).

1° Soit

$$(11) \qquad F(x)\varphi(x, r) - f(x)\Phi(x, r) = 0,$$

ou

$$F(x)\varphi(x, r) = f(x)\Phi(x, r);$$

en mettant les racines $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ au lieu de x dans cette dernière égalité, on voit que $f(x) = 0$ admet au moins une racine de $F(x) = 0$, puisque l'équation $\Phi(x, r) = 0$, qui est du degré $n-1$, n'a que $n-1$ racines; donc les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$, ont une racine commune, par exemple, $x_1 = x'_1$; alors, comme

$$\begin{aligned}\Psi(x_1) &= F(x)\varphi(x, x_1) - f(x)\Phi(x, x_1) \\ &= F(x_1)\varphi(x, x_1) - f(x_1)\Phi(x, x_1) = 0,\end{aligned}$$

on a

$$\Psi(r) - \Psi(x_1) = 0,$$

et par conséquent

$$r = x_1 = x'_1.$$

Maintenant, en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, dans l'identité (11), on obtient le système de $m+n$ équations (10) du premier degré, à $m+n$ inconnues,

$$\begin{matrix} -f_0(r), & -f_1(r), & \ldots, & -f_{m-1}(r), \\ F_0(r), & F_1(r), & \ldots, & F_{n-1}(r). \end{matrix}$$

Le déterminant égalé à zéro de ce système (10) sera la résultante des équations proposées $F(x) = 0$ et $f(x) = 0$ (méthode de Bézout et d'Euler).

2° Si l'on suppose, dans la formule (5),

$$(12) \qquad F(r)\varphi(x, r) - f(r)\Phi(x, r) = 0,$$

alors on a aussi

$$F(x)\varphi(x, r) - f(x)\Phi(x, r) = 0,$$

et, par suite,

$$r = x_1 = x'_1.$$

En substituant les expressions de $F_p(r)$ et de $f_q(r)$ (2) et (3), dans les équations (10), ou en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, dans l'identité (12), on trouve, dans le cas où $m = n$,

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & F_0(r)f(r) - f_0(r)F(r) \\ & \quad = A_{1,1}r^{n-1} + A_{2,1}r^{n-2} + \ldots + A_{n-1,1}r + A_{n,1}r^0 = 0, \\ & F_1(r)f(r) - f_1(r)F(r) \\ & \quad = A_{1,2}r^{n-1} + A_{2,2}r^{n-2} + \ldots + A_{n-1,2}r + A_{n,2}r^0 = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & F_{n-1}(r)f(r) - f_{n-1}(r)F(r) \\ & \quad = A_{1,n}r^{n-1} + A_{2,n}r^{n-2} + \ldots + A_{n-1,n}r + A_{n,n}r^0 = 0, \end{aligned} \right.$$

où

$$\begin{aligned} A_{j,k} &= a_{j-1}b_k - b_{j-1}a_k + A_{j-k,k+1} \\ &= a_{j-1}b_k - b_{j-1}a_k + a_{j-2}b_{k+1} + \ldots \\ &\qquad + a_0 b_{k+j-1} - b_0 a_{k+j-1} = A_{k,j}, \end{aligned}$$

et, dans le cas où $m < n$,

$$(16)\quad \begin{cases} F_0(r)f(r) = 0, \\ F_1(r)f(r) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_{n-m-1}(r)f(r) = 0, \\ F_{n-m}(r)f(r) - f_0(r)\,F(r) = 0, \\ F_{n-m+1}(r)f(r) - f_1(r)\,F(r) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_{n-1}(r)f(r) - f_{m-1}(r)\,F(r) = 0, \end{cases}$$

ou, plus simplement,

$$(17)\quad \begin{cases} f(r) = b_0 r^m + b_1 r^{m-1} + \ldots + b_{m-1} r + b_m r^0 = 0, \\ rf(r) = b_0 r^{m+1} + b_1 r^m + \ldots + b_{m-1} r^2 + b_m r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ r^{n-m-1} f(r) = b_0 r^{n-1} + b_1 r^{n-2} + \ldots \\ \qquad + b_{m-1} r^{n-m} + b_m r^{n-m-1} = 0, \\ F_0(r)\, r^{n-m} f(r) - f_0(r)\,F(r) \\ \quad = A_{1,1} r^{n-1} + A_{2,1} r^{n-2} + \ldots + A_{n-1,1} r + A_{n,1} r^0 = 0, \\ F_1(r)\, r^{n-m} f(r) - f_1(r)\,F(r) \\ \quad = A_{1,2} r^{n-1} + A_{2,2} r^{n-2} + \ldots + A_{n-1,2} r + A_{n,2} r^0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_{m-1}(r)\, r^{n-m} f(r) - f_{m-1}(r)\,F(r) \\ \quad = A_{1,m} r^{n-1} + A_{2,m} r^{n-2} + \ldots + A_{n-1,m} r + A_{n,m} r^0 = 0. \end{cases}$$

Les résultantes des équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$, dans les cas considérés, s'obtiennent, comme on sait, en égalant à zéro les déterminants des systèmes (15) et (17) (méthode abrégée de Bézout).

3° Si l'on a, pour toutes les valeurs de x,

$$(13)\quad \begin{cases} F(r)\,\varphi(x, r) \\ \quad = F(r)[f_0(r)x^{m-1} + f_1(r)x^{m-2} + \ldots + f_{m-1}(r)] = 0, \\ f(r)\,\Phi(x, r) \\ \quad = f(r)[F_0(r)x^{n-1} + F_1(r)x^{n-2} + \ldots + F_{n-1}(r)] = 0, \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}&F(x)\,\varphi(x,r)-f(x)\,\Phi(x,r)\\&\quad=F(r)\,\varphi(x,r)-f(r)\,\Phi(x,r)=0,\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$r=x_1=x'_1.$$

En égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, dans les égalités (13), on trouve $n+m$ équations linéaires, à $n+m$ inconnues : $r^0, r, r^2, \ldots, r^{n+m-1}$,

$$(18)\quad\begin{cases}f_0(r)\,F(r)=0, & f_1(r)\,F(r)=0,\\ f_2(r)\,F(r)=0, \quad \ldots, & f_{m-1}(r)\,F(r)=0,\\ F_0(r)f(r)=0, & F_1(r)f(r)=0,\\ F_2(r)f(r)=0, \quad \ldots, & F_{n-1}(r)f(r)=0\ (^1),\end{cases}$$

ou, plus simplement,

$$(19)\quad\begin{cases}F(r)=0, & r\,F(r)=0,\\ r^2\,F(r)=0, \quad \ldots, & r^{m-1}\,F(r)=0,\\ f(r)=0, & rf(r)=0,\\ r^2f(r)=0, \quad \ldots, & r^{n-1}f(r)=0;\end{cases}$$

le déterminant égalé à zéro des équations (19) sera la résultante cherchée. Il est facile de voir que les lignes horizontales de ce déterminant sont les colonnes verticales de celui qui correspond aux équations (10) (méthode de M. Sylvester).

4° Enfin, supposons

$$(14)\qquad F(r)=0,\qquad f(r)=0;$$

comme, en vertu de la formule (4),

$$\begin{aligned}&b_0^n[F(x'_1)-F(r)][F(x'_2)-F(r)]\ldots[F(x'_m)-F(r)]\\&\quad=(-1^m)\,b_0^{n-1}\,\Phi(x'_1,r)\,\Phi(x'_2,r)\ldots\Phi(x'_m,r)f(r),\end{aligned}$$

---

(1) Il est évident que, si l'on prend les systèmes (16) et (17), on introduira des facteurs étrangers dans les résultantes des équations données (1).

et aussi

$$a_0^m[f(x_1)-f(r)][f(x_2)-f(r)]\dots[f(x_n)-f(r)]$$
$$=(-1^n)\,a_0^{m-1}\,\varphi(x_1,r)\varphi(x_2,r)\dots\varphi(x_n,r)\,F(r),$$

on a la résultante des équations données $F(x)=0$, $f(x)=0$,

$$(20)\qquad \left\{\begin{array}{l} b_0^n F(x'_1)F(x'_2)\dots F(x'_m)=0,\\ \quad\text{ou}\\ a_0^m f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)=0.\end{array}\right.$$

SUR LA SÉRIE DE FOURIER;

PAR J. DE SÉGUIER, S. J.
Professeur à l'Université d'Angers.

Considérons la série

$$S=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{e^{\frac{2ni\pi z}{\omega}}}{\omega}\int_{u_0}^{u_0+\omega}f(u)e^{-\frac{2ni\pi u}{\omega}}du,$$

u, u_0, ω étant des grandeurs complexes, $f(u)$ une fonction telle que l'intégrale du terme général prise suivant un chemin rectiligne ait un sens, enfin z étant pris sur le chemin d'intégration.

Posons $u=u_0+\omega t$, $z=u_0+\omega\zeta$; t,ζ seront réels et l'on aura

$$S=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\int_0^1 f(u_0+\omega t)\,e^{2ni\pi(\zeta-t)}\,dt.$$

Soit alors

$$S_k=\sum_{n=-k}^{n=+k}\int_0^1 \varphi(t)\,e^{2ni\pi(\zeta-t)}\,dt,\quad \varphi(t)=f(u_0+\omega t).$$

Les exponentielles formant une progression géomé-

trique, on obtient

$$S_k = \int_0^1 \varphi(t) \frac{\sin(2k+1)\pi(t-\zeta)}{\sin \pi(t-\zeta)} dt,$$
$$S = \lim_{k=\infty} S_k,$$

et l'on est ramené à des intégrales de Dirichlet.

Si $\varphi(t)$ n'a pour $0 \leqq t \leqq 1$ d'autres discontinuités que des changements brusques de valeur (en restant finie), ou des pôles α tels que $\int^\alpha \varphi(t)\,dt$ reste finie quand t tend vers α par des valeurs supérieures ou inférieures à α et que la partie (réelle ou imaginaire, ou les deux parties) de $\varphi(t)$ qui devient infinie ait le même signe pour $t = \alpha + \varepsilon$, $t = \alpha - \varepsilon$, on a : pour toute valeur de ζ différente de 0 et 1 où la fonction φ est continue,

$$S = \varphi(\zeta) = f(z);$$

pour toute valeur $\zeta = \alpha$ où la fonction est discontinue

$$S = \tfrac{1}{2}[\varphi(\alpha - 0) + \varphi(\alpha + 0)];$$

enfin, pour $\zeta = 0$ ou $\zeta = 1$

$$(1) \qquad S = \tfrac{1}{2}[\varphi(0) + \varphi(1)] = \tfrac{1}{2}[f(u_0) + f(u_0 + \omega)]$$

(*voir*, par exemple, le cours de M. Picard, tome I).

Du développement précédent, en posant $e^{\frac{2i\pi z}{\omega}} = v$, on déduit évidemment un développement de Laurent pour une fonction de v qui serait holomorphe en $\log v$.

Enfin, si $f(z)$ a la période ω, comme on peut, en restant dans une région où $f(z)$ est holomorphe, déplacer parallèlement à lui-même le segment d'intégration, on retrouve ainsi le développement de Fourier et celui de Laurent tels qu'ils se déduisent par la voie ordinaire du théorème de Cauchy.

Voici, pour terminer, deux exemples (¹) où $u_0 = 0$, $\omega = 1$

$$\frac{e^{2mz\pi i w}}{1 - e^{2m\pi i w}} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{2nz\pi i}}{n - mw}, \qquad 0 < z < 1$$

$$z^2 - z + \tfrac{1}{6} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{2nz\pi i}}{n^2}, \qquad 0 \leqq z \leqq 1$$

Dans le second développement, la variable z peut atteindre les extrémités du segment, car

$$f(u_0) = f(u_0 + \omega) = \tfrac{1}{2}[f(u_0) + f(u_0 + \omega)].$$

On peut sur le premier vérifier directement la formule (1) d'après le développement connu de la cotangente.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1892.

Mathématiques.

Un cercle C est représenté en coordonnées rectangulaires par l'équation

(C) $$x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0.$$

1° On demande de former l'équation générale des coniques A qui sont doublement tangentes au cercle C, de telle façon que la corde qui joint les deux points de contact passe par l'origine des coordonnées, et qui sont en outre tangentes à la droite D ayant pour équation

$$y = x\sqrt{3} + \sqrt{3}.$$

2° Par un point quelconque M du plan, de coordonnées α'

(¹) KRONECKER, *Sitzungsberichte*, p. 498 et 499; 1883.

β, il passe en général deux coniques de cette espèce A', A''; où le point M doit-il se trouver pour que ces coniques soient réelles ?

3° Les deux coniques A', A'' qui passent au point M ont trois autres points communs M_1, M_2, M_3, dont on demande de calculer les coordonnées en fonction des coordonnées α, β du point M.

4° Former l'équation de l'hyperbole équilatère H qui passe par les quatre points fixes M_1, M_2, M_3, M_4 et montrer que cette hyperbole passe par quatre points fixes quand le point M se déplace.

5° Trouver le lieu des points d'intersection des deux coniques A', A'' et l'enveloppe de leurs sécantes communes, lorsque les cordes de contact de ces deux coniques avec le cercle C sont perpendiculaires. Quelle est, dans ce même cas, l'espèce des coniques A', A''?

N. B. — On prendra pour paramètre variable le coefficient angulaire m de la corde de contact de la conique A avec le cercle C.

Physique.

I. Dans quelles conditions émerge d'un prisme polygonal convexe un faisceau étroit qui a éprouvé une série de réflexions intérieures, dans une même section droite?

Examiner, en particulier, le cas où la section du prisme est un triangle équilatéral.

II. Quelle est, en colonne d'eau, la pression à l'intérieur d'une bulle de savon de 4^{cm} de diamètre, la constante capillaire (ou tension superficielle) du liquide qui constitue la bulle étant 75 en unités centimètre-gramme-seconde?

LA SYMÉTRIE EN COORDONNÉES POLAIRES ;

PAR M. J. LEFÈVRE,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée d'Amiens.

Lorsqu'une courbe rapportée à des coordonnées polaires est symétrique par rapport au pôle ou possède des

axes de symétrie passant par ce pôle, on peut utiliser ce centre ou ces axes pour simplifier la construction de la courbe.

Dans une première Partie nous indiquons les différentes combinaisons de ces symétries et nous donnons une règle permettant de reconnaître dans tous les cas l'arc minimum de la courbe qu'il suffit de construire directement, puis le procédé pour en déduire tout le reste de la courbe d'une façon précise.

Dans la seconde Partie, nous cherchons la forme analytique de l'équation d'une courbe quelconque possédant telle ou telle symétrie.

PREMIÈRE PARTIE (1).

Imaginons une demi-droite ou *rayon* R tournant autour du pôle à partir de l'axe polaire. Soit ω son angle avec Ox. Après avoir décrit un angle égal à 2π, il revient s'appliquer sur la même direction. Dans la suite, pour abréger le langage, nous distinguerons les uns des autres, au moyen de l'angle polaire correspondant, ces *rayons* ainsi superposés. Nous dirons : le *rayon* ω et le *rayon* $\omega + 2k\pi$.

Section I. — *Axes de symétrie.*

Soit un *rayon* faisant avec Ox l'angle α et supposons qu'en remplaçant ω successivement par $\alpha + \omega'$ et $\alpha - \omega'$ dans l'équation d'une courbe les deux équations en ρ ainsi obtenues aient les mêmes racines ; les points de la

(1) J'ai exposé depuis quelques années dans mon Cours les points fondamentaux de cette première Partie.

courbe sont alors deux à deux symétriques par rapport à la droite indéfinie A qui contient le *rayon* α.

Imaginons encore un autre *rayon* β tel que, si l'on remplace, dans l'équation d'une courbe, ω successivement par $\beta + \omega'$ et $\beta - \omega'$, les valeurs correspondantes de ρ dans ces deux cas sont égales et de signes contraires; les points de la courbe sont alors symétriques deux à deux relativement à la droite indéfinie B perpendiculaire à β.

Nous dirons dans ce qui suit que A est un axe de symétrie de *première espèce,* B *de seconde espèce,* et nous appellerons *rayons principaux* les rayons α et β [1].

Théorème. — *Si l'on prend par rapport à un rayon principal le symétrique d'un rayon principal, on en obtient un autre de même espèce.*

Soient θ, θ' deux rayons principaux faisant entre eux un angle φ. Je dis que le symétrique D de θ relativement à θ' est un rayon principal de même espèce que θ.

Supposons par exemple θ de première espèce, les valeurs de ρ qui correspondent à deux rayons R, R_1 symétriques par rapport à θ sont les mêmes. Replions R et R_1 autour de θ', on obtient R' et R'_1. Les valeurs de ρ ne changent pas, ou bien changent toutes de signe sui-

---

[1] La recherche de rayons principaux θ, pour lesquels on remplacerait ω par $\theta + \omega'$ et $\theta + 2k\pi - \omega'$, ne donnerait rien de plus. Car si l'on prend pour nouvel axe polaire le rayon $\theta_1 = \theta + k\pi$, auquel cas l'angle polaire est $\omega'_1 = \omega' - k\pi$, on a

$$\theta + \omega' = \theta_1 + \omega'_1 \qquad \text{et} \qquad \theta + 2k\pi - \omega' = \theta_1 - \omega'_1.$$

Cela revient donc à remplacer ω par $\theta_1 + \omega'_1$, puis $\theta_1 - \omega'_1$; θ_1 est par suite un rayon principal défini comme plus haut. On obtiendrait ce résultat en faisant tourner de $k\pi$ l'ensemble des rayons principaux, et l'on retrouverait les mêmes axes de symétrie.

vant que θ' est de première ou de seconde espèce ; en tous cas elles sont les mêmes pour R' et R'_1. Mais R' et R'_1 sont évidemment symétriques par rapport à L : donc D est comme θ un rayon principal de première espèce.

Jusqu'ici nous n'avons fait aucune hypothèse sur la variation qu'il faut faire subir à ω pour avoir toute la courbe. Nous allons maintenant supposer cet intervalle limité, ce qui ne peut avoir lieu que de deux façons : ou bien en ajoutant $2\mu\pi$ (μ entier) à ω, l'équation en ρ ne change pas, ou bien cette équation redevient la même si l'on y change ω en $(2\mu+1)\pi+\omega$ et ρ en $-\rho$. Nous supposerons toujours cet intervalle le plus réduit possible ([1]).

Examinons séparément chacun de ces deux cas.

Premier cas. — *La courbe est obtenue tout entière en faisant varier ω d'un angle $2\mu\pi$.*

Théorème II. — *θ étant un rayon principal, tous ceux qui donnent le même axe de symétrie sont compris dans la formule $\theta + h\mu\pi$ (h entier quelconque).*

Soient, en effet, M et M' deux points de la courbe qui correspondent à $\theta-\omega$ et $\theta+\omega$ (ω compté à partir du rayon θ). Un rayon principal θ' donnant le même axe de symétrie que θ sera de la forme $\theta'=\theta+k\pi$, je dis que k est de la forme $h\mu$. En effet, soit ω' l'angle polaire compté à partir de θ', on a

$$\omega = \omega' + k\pi;$$

([1]) Il est facile de s'en assurer dans la pratique. Soit, en effet, $\lambda\pi$ l'intervalle minimum qui donne la courbe entière, si λ est inférieur à 2μ ou $(2\mu+1)$, ce sera un diviseur de ce nombre, sans quoi l'intervalle $2\mu\pi$ [ou $(2\mu+1)\pi$] reproduirait un certain nombre de fois la courbe plus une fraction de cette courbe. On essayera donc pour λ tous les diviseurs de 2μ (ou $2\mu+1$) en conservant ρ ou le changeant en $-\rho$ suivant que λ est pair ou impair.

d'où

$$\theta - \omega = \theta' - \omega' - 2k\pi,$$
$$\theta + \omega = \theta' + \omega'.$$

Si à l'argument de M on ajoute $2\mu\pi$ ou $2h\mu\pi$, ρ ne change pas, donc les deux arguments

$$\theta - \omega + 2h\mu\pi = \theta' - \omega' - 2k\pi + 2h\mu\pi,$$
$$\theta + \omega = \theta' + \omega'$$

déterminent les mêmes points M et M'.

Pour que ces deux points soient encore symétriques par rapport à l'axe correspondant à θ', il faut évidemment que $2k\pi = 2h\mu\pi$. On a donc

$$\theta' = \theta + h\mu\pi. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ceci posé, imaginons tous les rayons principaux dans la courbe. D'après le théorème II tous ceux qui donnent des axes différents sont contenus à partir de l'un d'eux θ_1 dans l'intervalle $(\theta_1, \theta_1 + \mu\pi)$. En outre, il résulte du théorème I que ces rayons sont équidistants; sinon on en trouverait de nouveaux. Soit alors φ l'angle de deux rayons consécutifs, comme $\theta_1 + \mu\pi$ est de même espèce que θ_1, il faut que $\mu\pi$ soit un multiple de φ : $\mu\pi = m\varphi$ (m entier); d'où $\varphi = \frac{\mu\pi}{m}$. Il faut même, s'il existe à la fois des rayons principaux de première espèce et des rayons principaux de seconde espèce non confondus (ou *rayons simples*), que ces rayons alternent (th. I) et que leur nombre soit pair ($m = 2m'$), $\varphi = \frac{\mu\pi}{2m'}$.

Si un rayon principal est à la fois de deux espèces (*rayon double*), on verra plus loin (th. VI) que tous les autres sont doubles également, et que leur nombre m' est impair (seconde Partie). On a alors

$$\varphi = \frac{\mu\pi}{m'}.$$

Résolvons maintenant la question posée au commencement; nous aurons deux hypothèses à examiner :

1° *La courbe ne possède d'axes de symétrie que d'une seule espèce.* — Soient par exemple m axes de seconde espèce. Traçons les m rayons β qui recouvrent un intervalle $\mu\pi$ et numérotons-les, dans l'ordre de l'angle polaire croissant, de $\frac{\mu\pi}{m}$ en $\frac{\mu\pi}{m}$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$. Soient $B_1, B_2, \ldots, B_m$ les axes respectivement perpendiculaires à ces rayons.

Construisons alors l'ensemble S_1 des arcs de la courbe obtenus en faisant varier ω entre β_1 et β_2, je dis que S_1 est l'arc minimum d'où l'on peut déduire toute la courbe. En effet, si le rayon mobile R varie de β_2 à β_3 les points M correspondant décrivent l'arc S_2 symétrique de S_1 par rapport à B_2. Donc, inversement, si l'on replie l'arc S_1 autour de B_2, ce qui donne S_2, c'est comme si l'on faisait décrire au rayon mobile R l'angle $\beta_2\beta_3$.

On repliera ensuite S_2 autour de B_3, l'arc S_3 ainsi obtenu correspond pour l'angle polaire variable à l'angle $\beta_3\beta_4$, ...

Après $2m-1$ retournements, l'angle polaire aura donc parcouru $\frac{\mu\pi}{m}+(2m-1)\frac{\mu\pi}{m}=2\mu\pi$. Nous aurons donc la courbe tout entière, mais sans superposition d'un arc déjà obtenu sur lui-même.

Tous les axes sauf B_1 ont servi deux fois.

On opérerait de même, pour des axes de première espèce.

2° *La courbe possède des axes de chaque espèce.* — Supposons d'abord les rayons principaux *simples,* c'est-à-dire d'une seule espèce à la fois, et soit m' le nombre de rayons de chaque espèce.

Numérotons les α rayons consécutifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Soient $A_1, A_2, \ldots$ les axes correspondants, soient de même $\beta_1, \beta_2, \ldots$ les rayons de deuxième espèce et $B_1, B_2, \ldots$ les axes qui sont respectivement perpendiculaires.

Supposons, par exemple, α_1, β_1 consécutifs et dans l'ordre $\alpha_1 \beta_1$. Construisons l'arc S_1 dans cet intervalle, c'est encore l'arc minimum. On en déduira tout le reste de la courbe en le repliant successivement autour des axes $B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, \ldots$, et l'on aura toute la courbe au bout de $2m - 1$ retournements, tous les axes ayant servi deux fois sauf A_1.

Supposons au contraire les rayons principaux doubles. On utilisera deux fois les axes d'une même série. D'ailleurs, comme on le verra plus tard, les axes de l'autre série se trouvent ainsi utilisés d'eux-mêmes par le fait.

Deuxième cas. — *La courbe est obtenue tout entière en faisant varier* ω *de* $(2\mu + 1)\pi$.

Théorème III. — *Si toute la courbe est obtenue en faisant varier* ω *de* $(2\mu+1)\pi$, *à tout rayon principal* θ *correspond le rayon principal d'espèce différente* $\theta' = \theta + \mu\pi + \frac{\pi}{2}$.

Soit ω l'angle polaire compté à partir de θ. Aux arguments $\theta - \omega$ et $\theta + \omega$ correspondent des rayons vecteurs ρ et $\varepsilon\rho$ ($\varepsilon = 1$ si θ est de première espèce, $\varepsilon = -1$ si θ est de deuxième espèce).

Soit ω' l'angle polaire compté à partir de

$$\theta' = \theta + \mu\pi + \frac{\pi}{2}.$$

On a

$$\omega = \omega' + \mu\pi + \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\theta' + \omega' = \theta + \omega,$$
$$\theta' - \omega' = \theta - \omega + (2\mu + 1)\pi.$$

Donc à $\theta' - \omega' - (2\mu + 1)\pi$ et à $\theta' + \omega'$ correspondent ρ et $\varepsilon\rho$; ajoutons $(2\mu + 1)\pi$ au premier arc, ρ se change en $-\rho$, donc à $\theta' - \omega'$ et $\theta' + \omega'$ correspondent $-\rho$ et $\varepsilon\rho$; θ' est donc bien un rayon principal d'espèce contraire à θ.

Soit m' le nombre des rayons principaux de première espèce, il y aura m' rayons de deuxième espèce perpendiculaires à ceux-là. En tout $m = 2m'$.

Le théorème I est encore vrai ici. Du reste, puisqu'il faut changer ρ en $-\rho$, quand on ajoute $(2\mu + 1)\pi$ à ω, ρ ne change pas si l'on ajoute $2(2\mu + 1)\pi$. On en conclut que le théorème II subsiste en y remplaçant μ par $2\mu + 1$. Les rayons principaux qui fournissent les axes distincts sont contenus dans l'intervalle $(2\mu + 1)\pi$.

Si *m' est pair*, tous les rayons principaux sont *doubles*. En effet, soit α un rayon de première espèce, il lui correspond un rayon β de deuxième espèce à la distance $(2\mu + 1)\frac{\pi}{2}$. D'autre part, d'après ce qui précède, tous les α partagent l'intervalle $(2\mu + 1)\pi$ en m' parties égales et, puisque m' est pair, l'un de ces rayons sera à la distance $(2\mu + 1)\frac{\pi}{2}$, on aura un α et un β coïncidents; donc tous les autres coïncident.

Si *m' est impair*, le même raisonnement montre qu'aucun α ne coïncide avec aucun β; donc tous les rayons sont simples. Ainsi, pour *m' pair*, l'angle φ de deux rayons principaux consécutifs sera $\varphi = \frac{(2\mu + 1)\pi}{m'}$; pour *$m'$ impair* $\varphi = \frac{(2\mu + 1)\pi}{m}$.

Quant à l'usage des axes, il est le même que dans le

cas précédent, seulement on ne replie qu'une fois autour de chaque axe.

On peut donc énoncer cette règle générale :

RÈGLE. — *On construit la courbe entre deux rayons principaux consécutifs* θ, θ', *puis on replie successivement l'arc, ainsi obtenu, autour des axes qui correspondent aux rayons suivants, à commencer par* θ'.

SECTION II. — CENTRE DE SYMÉTRIE.

Le pôle peut être centre de symétrie de trois manières :

1° Lorsque l'équation de la courbe ne change pas si l'on remplace ω par $(2\lambda + 1)\pi + \omega$ (λ entier);

2° Lorsque l'équation de la courbe ne change pas si l'on change ρ en $-\rho$ et ω en $2\lambda\pi + \omega$;

3° Enfin, lorsque les valeurs de ρ correspondantes à une même valeur de ω sont deux à deux égales et de signes contraires.

Nous dirons, suivant ces trois cas, que O est un centre de symétrie de première, deuxième ou troisième espèce.

THÉORÈME IV. — *Lorsque la courbe s'obtient en faisant varier* ω *de* $2\mu\pi$, *le pôle ne peut être centre de première espèce que si* μ *est impair; il ne peut être centre de deuxième espèce que si* μ *est pair. Il peut, d'ailleurs, être centre de troisième espèce.*

Supposons, par exemple, que O soit centre de deuxième espèce, il existe un nombre λ tel que les arguments ω et $\omega + 2\lambda\pi$ donnent des points de la courbe symétriques par rapport au pôle, c'est-à-dire tels que ρ se change en $-\rho$. D'abord il est clair que $2\lambda\pi$ peut toujours être supposé inférieur à $2\mu\pi$, car on peut retrancher à ω autant de fois $2\mu\pi$ qu'on le veut. Ajoutons encore $2\lambda\pi$,

ρ change encore de signe et reprend sa valeur primitive et l'intervalle $4\lambda\pi$ reproduit toute la courbe : c'est donc l'intervalle réduit $2\mu\pi$ ou l'un de ses multiples. Si c'était un multiple, ce serait au moins $2(2\mu\pi)$ et l'on aurait $2\lambda\pi \geqq 2\mu\pi$, mais nous avons supposé $2\lambda\pi < 2\mu\pi$. Donc $4\lambda\pi = 2\mu\pi$, $\mu = 2\lambda$, donc μ est pair.

Même raisonnement si O est de première espèce.

Il en résulte que, pour reconnaître cette symétrie, il faut remplacer ω par $\mu\pi + \omega$; ρ ne doit pas changer ou doit se changer en $-\rho$, suivant que μ est impair ou pair.

THÉORÈME V. — *Lorsque la courbe entière s'obtient en faisant varier* ω *de* $(2\mu + 1)\pi$, *le pôle ne peut être centre que de troisième espèce.*

En effet, si le pôle était centre de première ou de deuxième espèce, on verrait, comme plus haut, que $2(2\lambda)$ ou $2(2\lambda + 1)$ doivent être multiples de $2\mu + 1$, donc λ ou $2\lambda + 1$, multiples de $2\mu + 1$, ce qui est impossible, 2λ et $2\lambda + 1$ étant moindres que $2\mu + 1$.

Ainsi, dans ce cas, le pôle ne peut être centre que de troisième espèce.

Usage du centre. — Lorsque le pôle est centre de première ou de deuxième espèce, on peut abréger de moitié la variation de ω. On fera varier cet angle de 0 à $\mu\pi$ et l'on prendra le symétrique de l'arc obtenu par rapport au pôle. Si c'est un centre de troisième espèce, on construit seulement l'arc correspondant aux valeurs positives de ρ.

SECTION III. — CENTRE ET AXES.

Supposons que, le pôle étant centre, la courbe ait un axe de symétrie passant par ce point, je dis qu'elle en

admet encore un second perpendiculaire au premier.

Cela est évident, géométriquement, mais nous allons donner la nature de ces axes.

1° *Le pôle est centre de première ou de deuxième espèce.* — Alors l'intervalle de variation de ω est $2\mu\pi$. Soit θ le rayon principal donné. Aux deux rayons $\theta - \omega$ et $\theta + \omega$ correspondent des valeurs ρ et $\varepsilon\rho$ ($\varepsilon = \pm 1$ suivant l'espèce de θ).

Prenons, comme nouvel axe polaire, le rayon

$$\theta' = \theta + \frac{\mu\pi}{2}.$$

On a

$$\omega' = \omega - \frac{\mu\pi}{2};$$

d'où

$$\theta + \omega = \theta' + \omega',$$
$$\theta - \omega = \theta' - \omega' + \mu\pi.$$

On peut donc dire encore que ρ et $\varepsilon\rho$ correspondent à $\theta' + \omega'$ et $\theta' - \omega' - \mu\pi$.

D'autre part, le pôle étant centre, aux deux angles $\theta + \omega$ et $\theta + \omega + \mu\pi$ correspondent ρ et $\varepsilon'\rho$ ($\varepsilon' = \pm 1$ suivant que θ est centre de première ou de deuxième espèce). On peut encore dire que ρ et $\varepsilon'\rho$ correspondent à $\theta' + \omega'$ et $\theta' + \omega' - \mu\pi$.

En résumé, $\varepsilon\rho$ et $\varepsilon'\rho$ correspondent à $\theta' - \omega' - \mu\pi$ et $\theta' + \omega' + \mu\pi$. Posons $\omega' + \mu\pi = \omega''$, $\varepsilon\rho = \rho'$.

On voit que ρ' et $\varepsilon\varepsilon'\rho'$ correspondent à $\theta' - \omega''$ et $\theta' + \omega''$.

Donc θ' est rayon principal.

Si O *est centre de première espèce*, $\varepsilon' = 1$, on voit que θ' est de même espèce que θ. Mais alors μ est impair et $\theta + \mu\frac{\pi}{2}$ est perpendiculaire à θ. Ainsi les deux axes de symétrie correspondants sont de même espèce et rectangulaires.

Si O *est de deuxième espèce,* à ρ' correspond $-\varepsilon\rho'$, θ' est d'espèce différente de θ, alors μ est pair et la direction de θ' s'applique sur celle de θ ou sur son prolongement. On a donc encore deux axes rectangulaires.

2° *Le pôle est centre de troisième espèce.* — Alors *tout rayon principal est à la fois des deux espèces.* Soit θ un rayon principal. A $\theta + \omega$ et $\theta - \omega$ correspondent des valeurs ρ et $\varepsilon\rho$ (ε marque l'espèce supposée de θ).

Mais à $\theta - \omega$ correspond aussi $-\varepsilon\rho$, puisque O est de troisième espèce. On voit ainsi que θ est encore de l'autre espèce.

Les deux axes de symétrie qui correspondent à ce rayon principal double seront d'espèce différente et rectangulaires.

Inversement. — Si la courbe possède deux axes rectangulaires de même espèce, O est centre de première espèce.

Si elle possède deux axes rectangulaires d'espèce différente, O est centre de deuxième ou de troisième espèce suivant que les rayons principaux correspondants diffèrent de $\frac{\mu\pi}{2}$ ou coïncident.

Cette réciproque résulte d'abord de ce que O est centre au point de vue géométrique pur et ensuite de ce que les trois cas de l'étude précédente avaient conduit à trois conclusions différentes.

Le dernier cas donne cette proposition que nous avons admise plus haut :

Théorème VI. — *Si un rayon principal est à la fois des deux espèces, le pôle est centre de troisième espèce et tous les autres rayons principaux sont à la fois des deux espèces.*

Usage de la symétrie. — Si le centre est de pre-

mière ou de deuxième espèce et qu'il y ait m axes, on peut employer les m axes pour construire la moitié de la courbe, puis achever par le centre. Le centre de troisième espèce permet seulement de construire la moitié de l'axe minimum. (*A suivre.*)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1892).

Mathématiques élémentaires.

On donne un cercle O, une tangente PQ à ce cercle et une droite D située dans le plan du cercle.

Déterminer sur la droite D un point A tel que les tangentes menées de ce point au cercle O interceptent sur la droite PQ un segment BC de longueur donnée $2a$. Reconnaître, pour chaque solution, si le cercle donné est inscrit dans le triangle ABC ou s'il est exinscrit, soit dans l'angle A, soit dans l'un des angles B ou C.

Mathématiques spéciales.

Étant donnés un ellipsoïde E, de centre O, et un cône du second ordre Q, de sommet S, on considère un trièdre $O\alpha\beta\gamma$, dont les arêtes forment un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde, et l'on prend le point d'intersection de chaque arête de ce trièdre avec le plan diamétral qui lui est conjugué dans le cône Q. On obtient ainsi trois points A, B, C qui déterminent un plan P.

1° Démontrer que le plan P passe par un point fixe F, quand le trièdre $O\alpha\beta\gamma$ varie.

2° Les points S et F déterminent une droite D; trouver le lieu des droites D qui passent par un point ω, lorsque le cône Q se déplace en restant égal et parallèle à un cône fixe.

3° Trouver, dans la même hypothèse, l'enveloppe G des droites D qui sont situées dans un plan donné H.

4° Trouver le lieu des foyers des courbes G, lorsque le plan H se déplace en restant parallèle à une droite donnée.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

On considère la surface S lieu des points M dont les coordonnées rectangulaires X, Y, Z sont définies par les équations

$$X = u \cos v,$$
$$Y = u \sin v,$$
$$Z = av + \sqrt{b^2 - u^2} - b\,\mathrm{L}\,\frac{b + \sqrt{b^2 - u^2}}{u},$$

dans lesquelles u, v désignent des variables indépendantes et a, b des longueurs données.

1° Étudier brièvement les courbes (V) définies par l'équation $v =$ const.; ces courbes sont planes et leur plan coupe la surface S sous un angle constant.

2° Montrer que la surface S est applicable sur une surface de révolution Σ, et indiquer le mode de correspondance entre les points des deux surfaces.

3° Un trièdre trirectangle $Mxyz$ se meut de manière que, dans chacune de ses positions, l'arête Mz soit normale en M à la surface S et l'arête Mx tangente à la courbe (V) qui passe au sommet M. A un mouvement élémentaire du trièdre correspondent un déplacement du sommet M, dont les projections sur les arêtes Mx, My, Mz sont de la forme

$$\xi\,du + \xi_1\,dv, \quad \eta\,du + \eta_1\,dv, \quad 0,$$

et une rotation du trièdre, dont les composantes suivant les mêmes arêtes sont de la forme

$$p\,du + p_1\,dv, \quad q\,du + q_1\,dv, \quad r\,du + r_1\,dv;$$

on demande d'exprimer en fonction de u et de v les quantités

$$\xi, \quad \eta, \quad \xi_1, \quad \eta_1,$$
$$p, \quad q, \quad r, \quad p_1, \quad q_1, \quad r_1.$$

4° Déterminer les lignes de courbure de la surface S et ses rayons de courbure principaux.

5° Trouver la surface lieu des centres de courbure princi-

paux de S; montrer que les deux nappes de ce lieu sont applicables sur une alysséide.

6° Déterminer les lignes asymptotiques de la surface S, leur courbure et leur torsion.

Composition de Mécanique rationnelle.

Un point matériel M est assujetti à se mouvoir sur une surface fixe S sous l'action d'une force P, constamment dirigée dans le plan tangent au point M; cette force dérive d'un potentiel et sa grandeur, en chaque point, ne dépend que de la valeur u du potentiel en ce point. On suppose en outre que le point M peut décrire une infinité de courbes d'égal potentiel, pourvu qu'on lui imprime une vitesse initiale convenable.

1° Démontrer que le carré de l'élément linéaire de S peut être représenté par la formule

$$ds^2 = \frac{du^2}{F(u)} + \frac{dv^2}{\varphi(u)},$$

les lignes $v = \text{const.}$ étant des lignes géodésiques orthogonales aux courbes d'égal potentiel.

2° En supposant que les lignes d'égal potentiel soient des courbes fermées, déterminer la forme des fonctions $F(u)$, $\varphi(u)$ de telle sorte que le point M décrive une trajectoire fermée, quelles que soient les conditions initiales où il est placé, la vitesse initiale pouvant toutefois être soumise à certaines restrictions.

Trouver l'expression de la force P qui doit alors agir sur le mobile.

3° On reconnaîtra que, parmi les surfaces qui satisfont à la question, se trouve la surface de révolution S_1 pour laquelle on a

$$ds^2 = \frac{m^8\, du^2}{4u(m^2+u)^4} + \frac{m^4 u\, dv^2}{(m^2+u)^2},$$

m désignant une longueur donnée et v l'azimut de l'élément ds par rapport à un plan méridien fixe.

Étudier la forme de la surface S_1.

Déterminer le mouvement que prendra le point M sur cette surface sous l'influence de la force P considérée aux paragraphes précédents, on suppose qu'à l'instant initial le mobile est

sur le parallèle correspondant à $u = 2m^2$ et que sa vitesse est tangente à ce parallèle.

Calculer la pression que, dans ce mouvement, le point M exercera sur la surface S_1.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DU PROBLÈME DONNÉ AU CONCOURS GÉNÉRAL EN 1891 [1];

PAR M. G. BRUYÈRE,

Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Toulouse.

1° Soit T le plan tangent au point M de Q. Ce plan coupe les quadriques du faisceau (Q, S) suivant des coniques formant un faisceau. Je prends l'une quelconque de ces coniques (σ) correspondant à la quadrique Σ (q, s correspondant à Q et S.) Le cône C de sommet P et s'appuyant sur σ a pour axes de symétrie les droites joignant P aux sommets du triangle conjugué commun aux coniques du faisceau (q, s) : pour le démontrer, je prends l'un de ces sommets, M par exemple, et par la droite PM je mène un plan quelconque R dont la trace sur T est r, il coupe C suivant deux droites aboutissant aux points d'intersection de r et σ, A et B; je dis que le rayon conjugué de PM par rapport à PA et PB lui est perpendiculaire. Cela démontré, PM sera bien un axe de symétrie de C, car le rayon conjugué PM′ engendre le plan diamétral conjugué de PM dans C et ce diamètre sera alors perpendiculaire à son plan diamétral conjugué.

Pour démontrer cette proposition, je considère les droites joignant P aux divers points d'intersection de r

---

[1] Énoncé, *N. A.*, p. 353, août 1891.

avec les coniques du faisceau (q, s) : nous avons ainsi un faisceau involutif dont l'un des rayons doubles est PM, deux rayons conjugués étant les droites isotropes issues de P.

L'autre rayon double est donc perpendiculaire sur PM et il est conjugué de cette droite par rapport à PA et PB : c'est donc PM'.

2° Je prends la définition suivante des sommets des cônes d'un faisceau de quadriques. « Le sommet des cônes du faisceau sont les points de l'espace ayant même plan polaire, par rapport à toutes les quadriques du faisceau. »

Dans le cas présent on connaît déjà un cône du faisceau dans la sphère de rayon nul S. Les plans polaires des points cherchés, par rapport à toutes les quadriques du faisceau, passent par P. Ces points sont donc situés sur le plan polaire π de P par rapport à Q. Soit O l'un de ces points. Ce point a même polaire par rapport à toutes les coniques du faisceau déterminé par π dans le faisceau de quadriques. Le point O est donc l'un des sommets du triangle autopolaire commun à toutes les coniques de ce faisceau.

D'ailleurs tout sommet O de ce triangle répond à la question, car les plans polaires de ce point par rapport à toutes les coniques du faisceau ont d'abord une droite commune; de plus, le point P étant le sommet de l'un des cônes du faisceau a même plan polaire π par rapport à toutes les quadriques Σ; le plan polaire de O par rapport à toutes les quadriques passent au point P et, par suite, se confondent.

Nous voyons donc qu'il y a toujours, outre le cône S, trois cônes dans le faisceau et nous savons trouver leurs sommets. Cherchons les conditions pour que l'un de ces cônes devienne un cylindre. Pour cela, il faut que l'un

des sommets du triangle précédemment défini soit rejeté à l'infini.

Ce point étant rejeté à l'infini, son plan polaire commun à toutes les quadriques du faisceau est un plan diamétral pour chacune d'elles; de plus, par suite de la présence de la quadrique S dans le faisceau, le pôle commun de ce plan est rejeté à l'infini dans une direction perpendiculaire.

Les quadriques du faisceau ont donc un plan principal commun et le point P est situé dans ce plan.

Réciproquement, si le point P est donné dans un plan principal de Q, toutes les quadriques du faisceau admettent aussi ce plan principal et il y a un cylindre parmi les quadriques du faisceau, dont les génératrices sont perpendiculaires au plan principal commun.

Pour qu'une quadrique de faisceau dégénère en l'ensemble de deux plans, il faut et il suffit que les quadriques S et Q soient tangentes; il faut donc et il suffit que P soit situé sur le lieu des centres des sphères de rayon nul bitangentes à Q.

L'ensemble de deux plans formant aussi un cylindre, on sait que tous les points du lieu sont dans les plans principaux. Ce lieu se confond avec le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à Q. Il se compose de trois lignes du second ordre situées dans les plans principaux, qui sont les lignes focales de la quadrique Q.

3° Le point P et la quadrique Q étant donnés, cherchons comment doit être prise une seconde quadrique Q' pour que la première propriété subsiste : c'est-à-dire, si nous prenons un point quelconque M de Q et le plan tangent T en ce point, qui détermine dans le faisceau (Q, Q') un faisceau de coniques (q, q'), il faut que les cônes de sommet P et passant par une conique σ du faisceau (q, q') admettent la droite PM pour axe de

symétrie. Un plan quelconque passant par PM coupe tous ces cônes chacun suivant deux rayons conjugués d'un faisceau involutif de sommet P et dont l'un des rayons doubles est PM puisque la propriété se conserve; dans ce cas, il faut encore que le rayon double autre que PM lui soit perpendiculaire, et, par suite, que les droites isotropes issues de P situées dans ce plan fassent partie du faisceau, c'est-à-dire qu'une conique du faisceau soit coupée par un plan quelconque passant par P suivant un cercle de rayon nul; or cette quadrique ne peut être que la sphère de rayon nul de centre P.

Puisque la propriété subsiste, la condition nécessaire et suffisante est donc que la quadrique Q' fasse partie du faisceau déterminé par Q et la sphère de rayon nul de centre P.

Remarque. — Lorsque dans un faisceau de quadriques il existe une sphère, toutes les quadriques du faisceau ont mêmes directions principales, car les sections par le plan de l'infini ont un triangle autopolaire commun qui est aussi conjugué par rapport à l'ombilicale, on voit donc que dans la question traitée les quadriques du faisceau QS ont même direction principale et, par suite, mêmes plans cycliques. Ceci peut encore servir à démontrer la première partie; en effet, si nous considérons tous les cônes de sommet P et s'appuyant sur les sections des quadriques du faisceau par T, ces cônes forment un faisceau, ils ont même sommet et parmi eux il y a le cône isotrope S; ils ont donc mêmes directions principales, et une direction principale du cône s'appuyant sur la section de Q par T, lequel dégénère en l'ensemble de deux plans, est la droite PM; ceci démontre la première partie.

BIBLIOGRAPHIE.

Curso de Analyse infinitesimal, por *F. Gomes Teixeira,* Director da Academia polytechnica do Porto. Porto, 1889-1892; 3 vol. gr. in-8°.

L'Ouvrage considérable dont nous voudrions essayer de donner une idée aux lecteurs des *Nouvelles Annales* est le seul, croyons-nous, qui ait été publié jusqu'ici en langue portugaise, et qui traite des progrès les plus récents de l'Analyse infinitésimale. Le succès mérité de cette œuvre a été assez grand pour que le premier Volume en soit déjà à sa deuxième édition, publiée en 1890, alors que le troisième Volume vient seulement de paraître, il y a quelques semaines.

Nul n'était mieux à même d'écrire un Traité aussi magistral que le savant directeur de l'Académie polytechnique de Porto, M. Gomes Teixeira, qui, par la publication d'un intéressant Recueil périodique, a largement contribué à propager dans son pays la culture des hautes Mathématiques; il ne saurait, d'ailleurs, être chez nous un inconnu, car une partie importante de ses beaux travaux a été publiée en langue française, dans plusieurs de nos journaux ou Bulletins scientifiques.

Nous ne croyons pouvoir mieux faire, au début, pour mettre en lumière l'importance et l'étendue des matières que contient le *Cours d'Analyse* de M. Gomes Teixeira, que d'en présenter ici un Tableau des plus sommaires, dont les éléments sont simplement empruntés aux Tables des trois Volumes dont se compose l'Ouvrage.

Tome I. — *Calcul différentiel* (358 pages).

Introduction. — Chapitre I : Théorie des nombres irrationnels, des nombres négatifs et des nombres imaginaires. — Chapitre II : Principes généraux de la théorie des fonctions.

Calcul différentiel. — Chapitre I : Notions préliminaires.— Chapitre II : Dérivées du premier ordre des fonctions. — Chapitre III : Applications géométriques. — Chapitre IV : Déri-

vées et différentielles d'ordre quelconque. — Chapitre V : Applications analytiques de la formule de Taylor. — Chapitre VI : Applications géométriques de la formule de Taylor. — Chapitre VII : Fonctions définies par des séries; singularités des fonctions. — Chapitre VIII : Fonctions de variables imaginaires.

Tome II. — *Calcul intégral*, première Partie (312 pages).

Chapitre I : Intégrales indéfinies. — Chapitre II : Intégrales définies. — Chapitre III : Applications géométriques. — Chapitre IV : Applications analytiques de la théorie des intégrales définies. — Chapitre V : Intégration des équations différentielles du premier ordre. — Chapitre VI : Intégration des équations différentielles d'ordre supérieur au premier. — Chapitre VII : Intégration des équations aux dérivées partielles. — Chapitre VIII : Applications géométriques.

Tome III. — *Calcul intégral*, seconde Partie (348 pages).

Chapitre I : Intégration des fonctions de variables imaginaires. — Chapitre II : Intégrales eulériennes; fonctions $\Gamma(a)$. Chapitre III : Fonctions elliptiques. — Chapitre IV : Applications de la théorie des fonctions elliptiques. — Chapitre V : Fonctions multiformes. — Chapitre VI : Méthode des variations.

On peut juger, par cette seule nomenclature, de la difficulté que présenterait une analyse tant soit peu complète d'un Ouvrage de cette nature. Il nous semble préférable de signaler simplement les points principaux qui contribuent d'une façon plus spéciale à donner au Cours d'Analyse de M. Gomes Teixeira son caractère d'originalité. Dans cet ordre d'idées, nous attirerons l'attention du lecteur sur les passages suivants :

Dans le Tome I (p. 149-152), le théorème fondamental de la théorie des déterminants fonctionnels se trouve établi d'une manière remarquablement simple et élégante. Tout le Chapitre IV, relatif aux dérivées d'ordre quelconque, mérite une sérieuse étude; on notera surtout les développements relatifs aux fonctions de fonctions, aux fonctions composées, ainsi que diverses applications, notamment aux nombres de Bernoulli, aux formules de Jacobi et de Waring. Dans ce même Chapitre,

nous citerons encore le paragraphe final, concernant les relations entre des fonctions et leurs dérivées.

Les paragraphes sur l'interpolation et sur le développement en séries des fonctions implicites (p. 256-263) paraissent particulièrement intéressants. Peut-être, cependant, l'auteur aurait-il pu donner un peu plus d'extension à l'étude de l'interpolation, si intéressante au point de vue des Mathématiques appliquées.

Le Chapitre VIII, *fonctions de variables imaginaires,* contient une étude très complète des fonctions analytiques, au moyen des méthodes de M. Weierstrass. C'est une sorte d'Introduction, claire et concise, à la théorie des fonctions, et dont on rencontrerait peut-être l'équivalent avec quelque difficulté dans d'autres Ouvrages.

On trouvera dans le Tome II (p. 38-43) une démonstration nouvelle d'un important théorème sur l'intégrale $\int f(x, \sqrt{y})\,dx$, qu'on peut faire dépendre d'une suite d'intégrales plus simples. Une remarquable décomposition de l'intégrale $\int e^{mx} f(x)\,dx$ fait l'objet d'une Note digne d'intérêt (p. 52-53). Au paragraphe sur les équations aux dérivées partielles du second ordre, figure (p. 262-266) une simplification notable d'une méthode d'Imschenetsky, simplification qui a déjà fait l'objet d'un travail publié par M. Gomes Teixeira dans le *Bulletin de la Société mathématique de France.* Enfin, l'auteur généralise (p. 271-274) un résultat de M. Appell, à propos de l'équation différentielle $(x - y)s - \alpha' p + \alpha q = 0$.

Le Tome III renferme (p. 8-10) la reproduction d'un travail publié par l'auteur dans les *Nouvelles Annales* sur l'intégrale $\int_0^\pi \cot(x - a - ib)\,dx$, laquelle prend la valeur $i\pi$ si $b > 0$, et $-i\pi$ si $b < 0$. Pages 40-42, nous signalerons la démonstration d'un important théorème de M. Hermite sur l'interpolation; pages 53-61, une théorie originale du développement d'une fonction ordonnée suivant les puissances de sinus et cosinus, d'après un article de l'auteur, publié dans le *Bulletin des Sciences mathématiques;* pages 100-103, une démonstration concernant l'expression de $\log\Gamma(a)$ au moyen d'une intégrale définie; page 112, une remarque qui se rapporte à un très intéressant travail de M. Rouché sur la formule de Stirling; pages 127-128, plusieurs inégalités d'une réelle importance

dans la théorie des fonctions elliptiques; pages 161-163, une proposition concernant une série qui se présente dans la même théorie; pages 167-172, l'étude de la fonction $p(u)$; pages 224-226, d'intéressantes propriétés des fonctions $\text{sn}\,u$, $\text{cn}\,u$, $\text{dn}\,u$, et, en dernier lieu, pages 287-290, un théorème sur les fonctions holomorphes, extrait d'un article publié dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

Les détails, bien incomplets cependant, dans lesquels nous venons d'entrer, seront de nature, nous l'espérons du moins, à faire comprendre toute l'importance d'un tel Ouvrage. Nous hésitons d'autant moins à le recommander à l'attention du public mathématique français, que la langue dans laquelle il est écrit est pour nous l'une des plus faciles à comprendre à la lecture, lorsqu'il s'agit surtout de pareils sujets, où les signes algébriques, ces caractères de la langue mathématique universelle, viennent constamment à notre secours.

Le *Cours d'Analyse infinitésimale* de M. Gomes Teixeira est appelé à prendre la place qui lui appartient, c'est-à-dire une place considérable, dans tous les pays où l'on aime et où l'on cultive les hautes Mathématiques.

C.-A. Laisant,
Docteur ès Sciences mathématiques,
Membre correspondant de l'Académie royale
des Sciences de Lisbonne.

NOTE SUR UNE CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE DE L'ELLIPSE;

Par M. L. RAVIER.

Soit un point M décrivant un cercle M de centre O, MT la tangente en ce point au cercle. Supposons que tous les points A, B, C de cette tangente soient invariablement liés à M, ces points décrivent des cercles (A), (B), (C), ... concentriques au cercle (M).

Faisons une projection cavalière de cette figure; la

tangente MT a pour projection la tangente mt à l'ellipse (m) en m. Les points A, B, C, ... se projettent en des points a, b, c, ... de mt situés à des distances ma, mb, mc, ... de m proportionnelles à MA, MB, MC, ...

Les circonférences (A), (B), (C), ... se projettent suivant des ellipses (a), (b), (c), ... concentriques et homothétiques à (m).

Considérons les normales $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, ... aux ellipses (a), (b), (c), ...

Les droites $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, ..., étant les normales en a, b, c, ... à des ellipses concentriques et homothétiques à m, sont les perpendiculaires abaissées de ces points sur les diamètres conjugués par rapport à m de a, b, c, ...

Soient α, β, γ, ... les points où ces perpendiculaires rencontrent $m\mu$ normale à (m) en m, soit μ le point où cette normale touche son enveloppe; les segments $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, ... sont proportionnels à ma, mb, ... ([1]).

De là une construction du point μ.

Il suffit de prendre deux normales $a\alpha$, $b\beta$ et de déterminer le point μ sur $\alpha\beta$ de façon que $\frac{\mu\alpha}{\mu\beta} = \frac{ma}{m\beta}$.

Nous allons appliquer cette construction dans différents cas particuliers.

1° *On connaît, outre le point m et la tangente mt, le centre o et les directions de deux diamètres conjugués.*

Menons ces deux diamètres. Prenons pour points a et b les points où ils rencontrent mt.

Soit π le point de rencontre des perpendiculaires abaissées de b sur oa et de a sur ob, soit p le point de

([1]) Voir *Cours de Géométrie descriptive* de M. MANNHEIM, 2e édition, p. 170. On peut déduire de là que les droites $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$,... enveloppent une parabole touchant $m\mu$ en μ, ce qui conduit à des propriétés intéressantes déjà connues.

rencontre des parallèles menées de b à oa, de a à ob. Les triangles pab et $\pi\alpha\beta$ ont leurs côtés respectivement perpendiculaires; on en déduit que μ est le point de rencontre avec la normale en m de la perpendiculaire abaissée de π sur pm.

2° Dans le cas où les diamètres conjugués connus sont les axes, on retombe sur la construction ordinaire.

3° Cette construction ne s'applique pas aux extrémités des diamètres conjugués donnés. On prendra alors pour système de diamètres oa, ob le système des diagonales du parallélogramme circonscrit à l'ellipse, aux extrémités des diamètres donnés. Si l'on cherche ainsi les rayons de courbure aux sommets, on retombe sur la construction connue.

SUR LA CONSTRUCTION DE LA PARABOLE OSCULATRICE EN UN POINT D'UNE COURBE DONNÉE;

PAR M. M. D'OCAGNE.

1. La parabole osculatrice p en un point A d'une courbe c est celle qui a, en ce point, avec la courbe un contact du troisième ordre (quatre points communs confondus en un seul). Cette parabole a donc, au point considéré, même tangente et même centre de courbure Ω que la courbe proposée.

En outre, sa développée a même centre de courbure Ω' que la développée de la courbe c. Or, on sait, d'après Maclaurin, que si la normale $\Omega\Omega'$ à la développée coupe le diamètre de la parabole au point D, on a, en tenant compte du sens des segments,

$$\Omega D = \frac{\Omega'\Omega}{3}.$$

Lors donc qu'on connaît les centres de courbure Ω et Ω' de la courbe c et de sa développée pour le point A, on a, par là même, le centre de courbure Ω de la parabole au point A et le diamètre AD en ce point.

Remarquons en passant que si la courbe c est une conique à centre, la droite AD n'est autre que le diamètre de cette courbe.

Nous sommes donc, en résumé, amenés à résoudre le problème suivant : *Construire une parabole connaissant un de ses points* A, *le diamètre passant par* A, *et le centre de courbure* Ω *répondant à ce point.*

Avant de donner la solution de ce problème, nous établirons quelques propositions préliminaires.

2. Si la normale menée par le point A d'une parabole coupe cette courbe au point O, prenons comme axe des x la normale AO prolongée, et comme axe des y la perpendiculaire en O à cette droite. L'équation de la parabole prend alors, comme on le voit facilement, la forme

$$(y - 2\mu x)^2 = \lambda(y - \mu x). \tag{1}$$

La droite $y - 2\mu x = 0$ est le diamètre passant en O, et la droite $y - \mu x = 0$, la tangente en ce point. Puisque le coefficient angulaire de la première de ces droites est double de celui de la seconde, celle-ci est conjuguée harmonique de l'axe des y par rapport à la première et à l'axe des x. De là ce théorème :

Théorème I. — *Si la normale en* A *à la parabole rencontre cette courbe au point* O, *on a la direction de la tangente en* O *en prenant la conjuguée harmonique de la tangente en* A *par rapport à la normale et au diamètre passant en ce point.*

Prenons sur Ox un point P quelconque d'abscisse a. Du point P on peut mener à la parabole deux autres normales. Les pieds de ces normales sont, comme on le trouve aisément, sur la droite

$$(2) \qquad (2\mu^2 - 1)x - 3\mu y + a = 0.$$

Le coefficient angulaire de cette droite étant indépendant de a, cette droite a une direction fixe lorsque P varie sur Ox. Ainsi :

Théorème II. — *Lorsqu'un point se déplace sur une normale à une parabole, la droite qui joint les pieds des deux autres normales qu'on peut mener de ce point à la courbe conserve une direction fixe* [1].

Lorsque le point P se confond avec le centre de courbure Ω, le pied d'une de ces deux normales vient coïncider avec le point A. Donc :

Remarque. — *Cette direction fixe est celle de la droite qui joint le point A au pied de la seconde normale qu'on peut mener à la parabole du centre de courbure Ω.*

Considérons maintenant le cercle décrit sur OP comme diamètre. Son équation est

$$(3) \qquad x^2 + y^2 - ax = 0.$$

Multipliant l'équation (2) par x et l'additionnant

[1] Ce théorème et le suivant se trouvent généralisés pour les courbes dont l'équation est de la forme $(y - px)^p = (y - qx)^q$ dans un Mémoire que j'ai publié en 1888 dans l'*American Journal of Mathematics*. Mais, en passant de ce cas général à celui de la parabole, j'ai commis une inadvertance d'où est résulté un énoncé incorrect auquel il faut substituer celui du théorème III ci-dessus.

membre à membre avec (3), on a

$$(y - 2\mu x)(y - \mu x) = 0.$$

C'est-à-dire que la droite (2) coupe le cercle (3) aux points où ce cercle est rencontré par la tangente et par le diamètre au point O. Donc :

THÉORÈME III. — *Si le point* P *est pris sur la normale en* A *à une parabole que la droite* AP *rencontre encore en* O, *la droite qui joint les pieds des deux autres normales qu'on peut mener du point* P *à la parabole passe par les pieds* H *et* K *des perpendiculaires abaissées du point* P *sur le diamètre et sur la tangente en* O *à la parabole.*

REMARQUE. — *Si* R *et* S *sont les pieds des perpendiculaires abaissées de* P *sur le diamètre en* A *et sur la parallèle à la tangente en* O *menée par* A, *droites qui se confondent avec* PH *et* PK, *la droite* RS *est parallèle à* HK.

3. Abordons maintenant le problème que nous avons en vue.

Nous connaissons le point A, le diamètre AD et le centre de courbure Ω. Prenons la conjuguée harmonique de la tangente en A (perpendiculaire à AΩ) par rapport à AD et à AΩ. D'après le théorème I, cette droite AE sera parallèle à la tangente au second point O, encore inconnu, où AΩ rencontre la parabole.

Abaissons alors sur AD et sur AE les perpendiculaires ΩR et ΩS. La droite RS donne, d'après la remarque du théorème III, la direction de la droite joignant les points de rencontre H et K de ΩR et de ΩS avec la droite joignant les pieds des normales issues de Ω.

Mais, d'après la remarque du théorème II, cette droite

passe ici par le point A. Si donc nous menons par A une parallèle à RS, cette droite coupe ΩS en un point K situé, en vertu du théorème III, sur la tangente en O à la parabole. Cette tangente étant, en outre, parallèle à AS, se trouve complètement déterminée. Elle coupe AΩ au point O.

On est, dès lors, amené à construire la parabole cherchée connaissant les points A et O et les tangentes en ces points. On sait résoudre ce problème qui se rencontre d'ailleurs fréquemment dans les applications. J'en ai, à ce propos, fait connaître une solution fort simple dans le *Génie civil* (t. IX, p. 90 et 334).

CORRESPONDANCE.

(*Extrait d'une lettre de M. Barisien à M. Rouché*).

A la page 162 du numéro de juin des *Nouvelles Annales*, M. Laisant démontre, par la méthode des équipollences, que, si l'on coupe une hyperbole équilatère par deux sécantes rectangulaires, les produits des segments, à partir de l'intersection de ces sécantes, sont égaux.

Voici une démonstration très simple de cette propriété, basée sur la Géométrie analytique élémentaire.

Une hyperbole équilatère rapportée à deux droites rectangulaires quelconques a pour équation

$$x^2 - y^2 + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Or, si $y = 0$, on a pour le produit des abscisses x_1 et x_2 d'intersection

$$x_1 x_2 = -F.$$

De même, pour $x = 0$, le produit des ordonnées y_1

et y_2 d'intersection est

$$y_1 y_2 = F.$$

Donc

$$x_1 x_2 = y_1 y_2.$$

SUR LES CERCLES QUI TOUCHENT TROIS CERCLES DONNÉS OU QUI LES COUPENT SOUS UN ANGLE DONNÉ (1);

PAR M. MAURICE FOUCHÉ,

Agrégé de l'Université.

PROBLÈMES SUR LES CERCLES ISOGONAUX.

Nous avons vu que tous les cercles isogonaux à trois cercles donnés se répartissent en quatre faisceaux ayant chacun, pour axe radical commun, l'un des axes de similitude et, pour lieu de leurs centres, la perpendiculaire abaissée sur cet axe du centre radical des trois cercles donnés. De plus, la puissance de chaque point de l'axe radical, par rapport à tous les cercles isogonaux de la même famille, est connue. Par exemple, la puissance d'un centre de similitude de deux cercles donnés, par rapport aux cercles isogonaux, est égale au module d'inversion des deux cercles considérés relativement au centre de similitude considéré. Ces conclusions permettent de ramener aux problèmes relatifs à des faisceaux de cercles ayant même axe radical certains problèmes relatifs aux cercles isogonaux. Pour donner à ces questions toute la généralité désirable, il importe de voir ce que deviennent les conclusions précédentes lorsque

---

(1) *Voir* même Tome, p. 227.

quelques-uns des trois cercles donnés ou tous les trois dégénèrent en droites ou en points.

Si l'on a trois points, le seul cercle isogonal est le cercle circonscrit au triangle des trois points.

Si l'on a deux points et une droite, les cercles isogonaux sont tous ceux qui passent par les deux points. Les quatre faisceaux se réduisent ainsi à un seul.

Si l'on a deux droites et un point, les cercles isogonaux sont ceux qui ont leurs centres sur l'une des bissectrices des deux droites et qui passent par le point donné. Ils constituent ainsi deux faisceaux ayant chacun pour lieu des centres l'une des bissectrices et pour axe radical la perpendiculaire abaissée du point donné sur cette bissectrice. Les quatre faisceaux se réduisent à deux.

Si l'on a trois droites formant un triangle, les cercles isogonaux sont les cercles concentriques ayant pour centre l'un des points de concours des bissectrices intérieures ou extérieures. On peut les considérer comme formant quatre faisceaux ayant chacun pour axe radical la droite de l'infini.

Un cercle et deux points donnent un seul faisceau ayant pour axe radical la droite des deux points.

Deux cercles et un point donnent deux faisceaux ayant respectivement pour axe radical les droites qui joignent le point donné au centre de similitude.

Si enfin on a des cercles et des droites, les centres de similitude n'étant pas réduits en nombre, on aura les quatre faisceaux.

Ainsi, sauf la réduction du nombre des familles, les conclusions subsistent dans tous les cas; du reste, ces cas particuliers sont trop faciles à traiter pour qu'il soit nécessaire de s'y arrêter. Mais il en est d'autres qui méritent un examen particulier.

1° Les trois cercles donnés ont leurs centres en ligne droite. Quoique le centre radical soit rejeté à l'infini, les conclusions générales subsistent parce que chacun des centres de similitude conserve la même puissance par rapport à tous les cercles isogonaux d'un même faisceau. Les quatre faisceaux ont le même axe radical qui est la ligne des centres. Seulement, pour trouver le lieu des centres, le mieux sera de construire un cercle isogonal d'après le problème I, et d'abaisser de son centre une perpendiculaire sur la ligne des centres des cercles donnés.

2° Les trois cercles donnés ont un axe radical commun. Dans ce cas, chacun des points de la ligne des centres doit avoir la même puissance par rapport à tous les cercles isogonaux d'un même faisceau, parmi lesquels figurent les cercles orthogonaux qui appartiennent chacun aux quatre faisceaux, puisque, dans chaque groupe de deux cercles, ils correspondent à la fois aux deux centres de similitude. (Remarque II du théorème III). Donc les quatre faisceaux se confondent en un seul qui est le faisceau des cercles orthogonaux aux cercles donnés.

3° Les trois cercles donnés ont un centre de similitude commun. Les cercles isogonaux correspondants à ce centre se réduisent à des droites passant par le centre de similitude. Les trois autres familles ne subissent aucune modification.

Le fait que les cercles isogonaux à trois cercles donnés constituent quatre faisceaux déterminés donne immédiatement la solution des problèmes suivants :

Problème III. — *Construire un cercle isogonal à trois cercles donnés, passant par un point donné.*

On trace d'abord, d'après le problème I, un cercle

isogonal quelconque. Si les points d'intersection L et L′ de ce cercle avec l'axe de similitude correspondant sont réels, il suffit de circonscrire un cercle au triangle ALL′. Si les points d'intersection sont imaginaires, on joindra le point A à un point quelconque H de l'axe de similitude des trois cercles donnés; on mènera de H une sécante HPQ au cercle isogonal auxiliaire; le cercle circonscrit au triangle APQ déterminera sur HA un second point A′ du cercle cherché. Comme on sait que le centre de celui-ci se trouve sur la perpendiculaire abaissée du centre radical C des trois cercles donnés sur l'axe de similitude considéré, on achèvera facilement.

Le problème est toujours possible et admet quatre solutions, une pour chaque faisceau, sauf les cas particuliers signalés plus haut.

Problème IV. — *Construire un cercle isogonal à trois cercles donnés et ayant un rayon donné.*

Il s'agit de construire le cercle d'un faisceau ayant un rayon donné. Le problème est toujours possible si les sommets du faisceau L et L′ sont imaginaires et il admet deux solutions. Si les points L et L′ sont réels, le rayon a un minimum qui est la moitié de LL′. Il en résulte que le problème admet huit solutions réelles ou imaginaires.

Problème V. — *Construire un cercle isogonal à trois cercles donnés et coupant orthogonalement un cercle donné.*

Si l'on trace deux cercles du faisceau orthogonal au faisceau des cercles isogonaux, on sera ramené à construire le cercle orthogonal à trois cercles donnés. Il suffit de tracer un seul cercle du faisceau orthogonal. Le

centre du cercle cherché est à l'intersection de l'axe radical de ce cercle auxiliaire et du cercle donné avec la droite, lieu des centres du faisceau des cercles isogonaux. Si les sommets du faisceau L et L' sont réels, l'un de ces points pourra jouer le rôle de cercle auxiliaire et la solution sera toujours réelle. En général, il y aura quatre solutions réelles ou imaginaires.

Problème VI. — *Construire un cercle isogonal à quatre cercles donnés.*

Si, parmi les quatre cercles donnés, on considère deux groupes de trois, il y aura, pour chaque groupe, quatre lieux rectilignes des centres des cercles isogonaux; le centre du cercle cherché ne peut être qu'à l'intersection de ces lieux. Soit ω l'intersection de deux lieux des centres correspondants dans chaque groupe à un même centre de similitude des deux cercles communs aux deux groupes. On pourra, de ω comme centre, décrire un cercle isogonal aux trois cercles du premier groupe : ce sera le cercle (σ) du faisceau correspondant ayant son centre en ω. On peut aussi, de ω comme centre, décrire un cercle (σ') isogonal aux trois cercles du second groupe; mais le cercle (σ) est déjà isogonal aux deux cercles communs aux deux groupes et il résulte du corollaire du théorème III que, d'un point ω comme centre, on ne peut mener qu'un seul cercle isogonal à deux cercles donnés, correspondant à un centre de similitude de ces deux cercles, car la puissance de ce centre de similitude par rapport au cercle inconnu est déterminée. Donc les cercles (σ) et (σ') n'en font qu'un qui est isogonal aux quatre cercles donnés. Si, au contraire, on prend l'intersection de deux lieux de centres correspondant à des axes de similitudes différents des deux cercles communs, les deux cercles (σ) et (σ') seront différents à moins qu'ils

ne soient orthogonaux aux cercles donnés (théorème III, remarque II). Mais alors les quatre cercles donnés ont même centre radical, et ce centre radical est commun à tous les lieux de centres considérés.

Il peut arriver que le cercle (σ) soit imaginaire, mais seulement si les points communs du faisceau L et L′ sont imaginaires et si le centre ω tombe entre les deux points limites; il peut arriver aussi que le cercle (σ) étant réel ne coupe pas les quatre cercles donnés.

On peut choisir un des quatre axes de similitude du groupe de trois cercles donnés O, O_1, O_2; alors, dans le groupe $O\,O_1\,O_2$, il faudra conserver le centre de similitude de $O\,O_1$ déjà choisi, de sorte que le deuxième choix ne peut porter que sur deux axes de similitude. Donc *le nombre total des solutions est de huit.*

Comme on peut faire quatre groupes de trois parmi les quatre cercles donnés et que tous ces groupes donnent évidemment la même solution, on obtient le théorème suivant :

Théorème VII. — *Étant donnés quatre cercles, choisissons leurs centres de similitude, deux à deux, de telle sorte que les centres de similitude de chaque groupe de trois cercles soient sur un même axe de similitude. Les perpendiculaires abaissées du centre radical de chaque groupe sur l'axe de similitude correspondant sont concourantes.*

Nous venons de voir que le problème VI pouvait présenter des solutions imaginaires. En dehors de ce cas, le problème peut admettre une solution singulière ou être indéterminé.

Si les deux lieux de centres qui servent à déterminer le centre ω du cercle (σ) sont parallèles, les deux axes de similitude seront parallèles, et, comme ils ont un point

commun, ils se confondent : les six centres de similitude sont en ligne droite et cette droite répondra à la question. Alors, à moins que les quatre cercles n'aient leurs centres en ligne droite, les autres centres de similitude seront en dehors de la première droite et les sept autres solutions seront des cercles déterminés. Si, les six centres de similitude étant en ligne droite, les quatre cercles ont même centre radical, les deux lieux de centres coïncident ; le problème sera indéterminé, tous les cercles du faisceau répondant à la question. En écartant le cas où les quatre centres seraient en ligne droite, les sept autres solutions se réduisent au cercle orthogonal. Si enfin les quatre centres sont en ligne droite, la seule solution sera la ligne des centres, sauf dans les deux cas suivants : 1° les quatre cercles ont un axe radical commun et les solutions sont les cercles orthogonaux ; 2° les quatre cercles sont homothétiques, et les solutions se réduisent aux rayons d'homothétie.

Problème VII. — *Construire un cercle qui coupe trois cercles donnés sous un angle donné.*

Tous les cercles isogonaux aux trois cercles donnés se répartissent en quatre faisceaux. Si les sommets L et L′ de ces faisceaux sont réels, on est immédiatement ramené à faire passer par ces deux points un cercle qui coupe l'un des cercles donnés suivant un angle donné. Ce problème se résoud facilement, comme on sait, par l'inversion. En prenant pour pôle l'un des points donnés, le cercle cherché se transforme en une droite qui doit être tangente à un cercle concentrique au cercle transformé du cercle donné. Il suffit donc de mener par le transformé du second point une tangente à ce cercle concentrique. Il y a évidemment avantage à prendre pour module d'inversion la puissance du pôle par rapport au

cercle donné, afin de conserver celui-ci. On trouve ainsi deux solutions réelles ou imaginaires.

Si les deux sommets du faisceau se confondent, c'est-à-dire si tous les centres isogonaux sont tangents entre eux, la construction s'applique encore, sauf que, le transformé du second point étant rejeté à l'infini, il faut mener au cercle concentrique des tangentes parallèles à l'axe radical du faisceau. Il en résulte que, dans ce cas, les deux solutions sont toujours réelles.

Si les sommets du faisceau ne sont pas réels, on pourra employer l'artifice suivant : Soit A l'un des points d'intersection du cercle cherché avec l'un des cercles donnés O. Par A passe un cercle orthogonal au faisceau des cercles isogonaux, lequel coupera le cercle O suivant un angle complémentaire de l'angle donné. Mais ce cercle orthogonal passe par les points limites du faisceau, lesquels sont réels et faciles à déterminer. On est donc encore ramené au même problème. Il suffira de construire un cercle passant par les points limites et coupant le cercle O sous l'angle complémentaire de l'angle donné. Les deux solutions qu'on trouvera donneront quatre points A, A', A_1, A_1', qui seront les quatre points d'intersection des deux cercles cherchés avec le cercle O. Il est inutile de se préoccuper d'assembler ces quatre points, car, partant de l'un d'eux, on pourra construire le cercle isogonal aux trois cercles donnés qui y passe, soit d'après la construction du problème I, soit plutôt par la condition qu'il est orthogonal au cercle auxiliaire. Le cercle ainsi déterminé passera par l'un des trois autres points et les deux points restants serviront à construire la deuxième solution.

Chaque faisceau de cercles isogonaux donnant deux solutions, il y a en tout huit solutions réelles ou imaginaires.

On remarquera que le raisonnement précédent permet de ramener le problème II (cercle tangent à trois cercles donnés) à la recherche du cercle passant par deux points et tangent à un cercle donné ou orthogonal à un cercle donné suivant que les points L et L′ sont réels ou imaginaires.

Enfin la construction s'applique aussi bien lorsque les cercles donnés se réduisent à des points ou à des droites.

Ce problème, qui équivaut à construire le cercle d'un faisceau coupant un cercle donné sous un angle donné, est, dans notre théorie, un problème fondamental auquel nous ramènerons tous les suivants.

DES FAMILLES DE CERCLES QUI SONT COUPÉS SOUS UN MÊME ANGLE PAR CHAQUE CERCLE D'UN FAISCEAU.

THÉORÈME VIII. — *Tous les cercles qui coupent deux cercles fixes sous des angles constants se répartissent en deux familles telles que tous les cercles d'une même famille ont un axe de similitude commun et un centre radical commun.*

En effet, soit un cercle O qui coupe deux cercles donnés ω et ω' respectivement sous les angles α et β. Transformons la figure par inversion avec un point H de l'axe radical (D) des deux cercles ω et ω' comme pôle et un module égal à la puissance commune de H par rapport à ces deux cercles. Les cercles ω et ω' se conservent et le cercle O se transforme en un cercle O′ coupant aussi ces deux-là respectivement sous les angles α et β. En faisant varier le point H, on obtient une famille de cercles O ayant tous pour axe de similitude l'axe radical des cercles ω et ω'.

Considérons trois cercles de cette famille O, O′, O″.

Le cercle ω leur est isogonal et appartient au faisceau correspondant à l'axe de similitude (D). Donc le centre radical de $OO'O''$ est sur la perpendiculaire abaissée de ω sur (D) (théorème IV, remarque II); il se trouve donc à l'intersection C de cette perpendiculaire avec l'axe radical de O et O'. Si alors on fait varier le cercle O'', le centre radical C des trois cercles reste invariable.

Si l'on considère deux cercles O et O_1 coupant respectivement ω et ω' sous les angles α et β, il peut arriver que ω et ω', qui sont isogonaux aux cercles à O et O_1, correspondent à un même centre de similitude de O et O_1. Alors O et O_1 appartiendront à une même famille, et leur centre de similitude considéré sera sur l'axe radical (D); mais il peut se faire aussi que ω et ω' soient isogonaux à O et O_1 relativement à deux centres de similitude différents. Cela dépendra de la disposition des tangentes faisant les angles α et β (théorème III, remarque II). Dans ce cas, il n'y a aucune raison pour que l'un ou l'autre de ces centres de similitude se trouve sur l'axe radical, et chacun des deux cercles O et O_1 peut servir de point de départ à une famille construite comme précédemment.

Je dis maintenant que tout cercle coupant ω et ω', respectivement sous les angles α et β, fait partie d'une de ces deux familles. En effet, soient O et O_1 deux cercles de familles différentes et O' un cercle quelconque de l'énoncé. ω est isogonal à OO_1O' et fait partie d'un faisceau admettant pour axe radical l'un des axes de similitude. Il en est de même de ω'. Or ces deux axes de similitude se coupent en un des centres de similitude S des trois cercles. Donc les cercles ω et ω' sont isogonaux aux deux cercles admettant S pour centre de similitude relativement à ce centre S. S n'est donc pas le centre de similitude de O et O_1, autrement O et O_1 feraient partie

de la même famille. Alors S est le centre de similitude de O′ avec O ou O_1 et, dans les deux cas, le cercle O′ appartient à l'une des familles construites en partant soit de O, soit de O_1.

La deuxième partie de la démonstration tomberait en défaut si l'axe radical des deux cercles O et O′ coïncidait avec la ligne des centres $\omega\omega'$. Alors on remplacerait l'un des cercles O ou O′ par un autre. Dans le cas où tous les cercles O admettraient $\omega\omega'$ pour axe radical, ils formeraient un faisceau et auraient encore tous leurs centres de similitude en ligne droite; seulement au lieu d'avoir un centre radical commun, ils en auraient une infinité situés sur leur axe radical. Dans ce cas, tous les cercles O ayant un axe radical commun, si l'on considère trois d'entre eux, les cercles qui leur sont isogonaux, tels que ω et ω', ne peuvent être que leurs cercles orthogonaux (Discussion des cas particuliers des faisceaux de cercles orthogonaux, 2°). Donc le cas ne peut se présenter que si les angles α et β sont droits.

Pour que la famille des cercles O se réduise à des cercles homothétiques, il faut et il suffit que les deux cercles ω et ω' se réduisent à des droites.

Corollaire. — *Tous les cercles enveloppant deux cercles fixes se répartissent en deux familles définies comme précédemment.* C'est le cas où les angles α et β sont nuls.

Théorème IX. — *Tous les cercles qui coupent deux cercles fixes sous des angles constants et qui appartiennent à une même famille admettent pour cercles isogonaux tous les cercles du faisceau défini par les deux cercles fixes.*

En effet, considérons trois cercles remplissant les con-

ditions de l'énoncé O, O', O''; les deux cercles fixes ω et ω' leur sont isogonaux relativement à un même axe de similitude. Donc le faisceau correspondant des cercles isogonaux est bien le faisceau défini par les deux cercles ω et ω' et ce faisceau reste le même quand on fait varier l'un des trois cercles O, O', O''.

Théorème X. — *Tous les cercles qui coupent deux cercles fixes sous des angles constants et qui appartiennent à une même famille enveloppent deux cercles fixes réels ou imaginaires.*

Car, parmi les cercles du faisceau isogonal, figurent deux cercles tangents à trois des cercles variables (problème II), et les cercles qui coupent ces trois-là sous un angle nul coupent aussi sous un angle nul tous les cercles variables considérés (théorème IX).

Si l'on considère un faisceau quelconque de cercles, qu'on le coupe par un cercle quelconque O et qu'on transforme le cercle O par inversion en prenant pour pôle un point H de l'axe radical et pour module la puissance commune de ce point par rapport à tous les cercles du faisceau, on obtiendra, en faisant varier le point H, une famille de cercles admettant tous les cercles du faisceau comme cercles isogonaux et jouissant de toutes les propriétés précédentes.

On peut rassembler tous les résultats précédents dans l'énoncé général suivant :

Théorème XI. — *Tous les cercles d'un faisceau sont isogonaux à tous les cercles d'une famille admettant pour axe de similitude commun l'axe radical du faisceau et pour centre radical commun un point de la ligne des centres du faisceau, et enveloppant deux cercles fixes.*

A chaque faisceau de cercles correspondent une infinité de familles ainsi définies.

Chacune de ces familles peut être définie de plusieurs manières :

1° On peut se donner deux cercles du faisceau et un des cercles de la famille, ou bien deux cercles fixes et les angles α et β avec l'indication de la disposition des tangentes qui font ces angles. Les deux dispositions restent les mêmes ou changent en même temps pour tous les cercles de la famille.

2° On peut se donner les deux cercles enveloppes, avec l'indication de l'espèce des contacts d'un cercle de la famille. Pour toute la famille, les espèces des contacts restent les mêmes ou changent en même temps.

3° On peut se donner l'axe commun de similitude, le centre radical commun et un cercle de la famille.

A chaque famille ainsi définie ne correspond qu'un seul faisceau de cercles isogonaux.

Cette famille de cercles tangents à deux cercles fixes comprend comme cas particuliers :

1° Les cercles homothétiques, lorsque les deux cercles enveloppes se réduisent à deux droites;

2° Un faisceau de cercles, lorsque les deux cercles enveloppes se réduisent à deux points réels ou imaginaires.

Dans le cas général on peut, par chaque point du plan, faire passer deux cercles de la famille considérée, réels ou imaginaires, puisque par un point on peut faire passer deux cercles tangents à deux cercles donnés avec des contacts de même espèce, et deux cercles tangents avec des contacts d'espèces différentes. Le lieu des centres des cercles d'une même famille est une conique ayant pour foyers les centres des deux cercles enveloppes.

Problème VIII. — *Étant donnés deux cercles, par un point pris sur l'un d'eux faire passer un cercle qui les coupe tous deux sous des angles donnés.*

Par le point A donné sur le cercle O on mène une droite AT coupant ce cercle sous l'angle α. Le cercle cherché fait partie du faisceau des cercles tangents en A à AT. On est ainsi ramené au problème VII : *Trouver le cercle d'un faisceau qui coupe sous l'angle* β *le second cercle donné* O'.

Comme on peut mener par le point A deux droites coupant le cercle O sous l'angle α et que chacune donne deux solutions, on obtient quatre solutions toujours réelles.

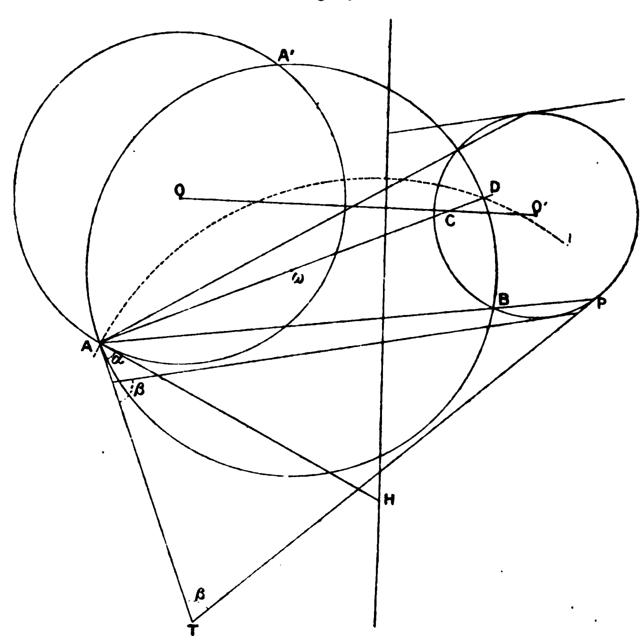
Ce problème est un cas particulier de celui où le point donné est quelconque dans le plan. Le problème général se résout facilement par l'inversion. En prenant pour pôle le point donné, le cercle cherché se transforme en une droite qui doit être tangente à deux cercles concentriques aux transformés des cercles donnés et dépendant des angles donnés. Il suffit donc de mener les tangentes communes à ces deux cercles concentriques.

Si, comme nous le supposons, le point donné se trouve sur l'un des cercles, il existe un tracé plus simple, fondé sur la propriété bien connue que les tangentes aux deux extrémités d'une sécante menée par l'un des points d'intersection de deux cercles font entre elles un angle égal à l'angle des cercles. On obtient ainsi la construction suivante :

Par le point A donné sur le cercle O on mène une droite AT coupant ce cercle sous l'angle α (*fig.* 4) : elle sera tangente au cercle cherché. Puis on circonscrit au cercle O' un parallélogramme dont les côtés font avec AT l'angle β. La droite qui joint à A l'un des points de

contact P coupe le cercle O′ en un second point B qui, avec le point A et la tangente AT, détermine le cercle inconnu. Deux côtés consécutifs du parallélogramme donnent les deux points d'intersection d'un même cercle cherché avec O′; les deux autres donnent une seconde

Fig. 4.



solution qui appartient à une autre famille. Comme on peut mener par A deux droites AT et AT′ faisant l'angle α avec O, on aura en tout quatre solutions toujours réelles appartenant deux par deux aux deux familles.

Remarque. — Le problème précédent fournit un moyen de déterminer le centre radical de tous les cercles d'une même famille qui coupent les cercles O et O′ sous les angles α et β. Il suffit, en effet, de choisir, parmi les

quatre cercles trouvés, les deux qui appartiennent à une même famille et de prendre l'intersection de leur corde commune avec la ligne des centres de O et O'. Pour reconnaître deux cercles ω et ω' d'une même famille, soient A' et A'_1 leurs deuxièmes points d'intersection avec O. Le centre de similitude H de ω et ω' doit être sur l'axe radical de OO' et leur module d'inversion doit être égal à la puissance du point H par rapport à O. Comme le point A se correspond à lui-même sur les deux cercles ω et ω', il faudra que AH soit tangent à O et que $A'A'_1$ passe par H. Mais il y a plus. Le second point d'intersection D des cercles ω et ω' doit aussi se correspondre à lui-même dans l'inversion, donc

$$HD = HA,$$

ce qui conduit à la construction suivante :

Après avoir déterminé comme précédemment l'un des cercles ω qui coupe O en A, et tracé la tangente en A qui coupe l'axe radical en H, on décrira de H comme centre avec HA comme rayon un cercle qui coupera le cercle ω en un second point D. La droite AD sera l'axe radical des cercles ω et ω' et coupera l'axe radical de O et O' en un point C, qui sera le centre radical cherché de tous les cercles de la famille. La puissance commune de ce point par rapport à tous les cercles de la famille sera égale au produit CA.CD.

Problème IX. — *Construire un cercle qui coupe trois cercles sous des angles donnés.*

On connaît plusieurs méthodes pour résoudre ce problème. M. G. Tarry en a indiqué une qui repose sur la transformation par inversion des deux cercles donnés soit en deux droites, soit en deux cercles concentriques, et sur la résolution préalable du problème VIII par un

procédé différent de celui que nous venons d'indiquer (*Journal de Mathématiques élémentaires*, octobre 1889). La méthode de M. G. Tarry lui a fourni une démonstration du théorème X ainsi que de l'existence du centre radical commun; mais l'axe de similitude commun n'est pas indiqué.

Voici la méthode qui résulte de notre théorie.

Considérons tous les cercles qui coupent deux des cercles donnés O et O′ sous les angles donnés α et β et qui appartiennent à une même famille. Ils admettront un centre radical commun C qu'on sait déterminer par la remarque du problème VIII. De même, tous les cercles qui coupent O et O″ sous les angles α et γ admettent un centre radical commun C′. Connaissant les deux points C et C′ ainsi que leurs puissances par rapport au cercle considéré, on reconnaît que celui-ci fait partie d'un faisceau complètement déterminé dont CC′ est l'axe radical. Dès lors, il ne reste plus qu'à chercher les cercles de ce faisceau qui coupent le cercle O sous l'angle α (problème VII).

Pour montrer que les cercles ainsi obtenus répondent bien à la question, il suffit d'établir la proposition suivante :

Si l'on considère la famille des cercles coupant O et O′ respectivement sous les angles α et β et leur centre radical C, tout cercle ω, qui coupera O sous l'angle α et par rapport auquel C aura la même puissance que par rapport aux cercles de la famille, coupera le cercle O′ sous l'angle β.

Or, si A est l'un des points d'intersection de ω avec O, il existe deux cercles de la famille ω et ω_1 passant par A (problème VIII) par rapport auxquels C a la puissance μ.

D'autre part, il y a aussi deux cercles passant par A, coupant O sous l'angle α et tels que C ait par rapport à

chacun d'eux la puissance μ, car la connaissance de la puissance μ détermine un second point du cercle considéré et l'angle α détermine la tangente en A avec l'ambiguïté de deux positions symétriques par rapport à la tangente en A au cercle O. Donc le cercle ω, qui est l'un de ces deux-là se confond avec l'un des deux cercles de la famille. C. Q. F. D.

Comme on peut combiner chaque famille correspondant au groupe OO' avec chaque famille correspondant au groupe OO'', et que chaque combinaison donne deux solutions, le problème admet en tout huit solutions réelles ou imaginaires.

Lorsque les trois cercles passent par un même point, ce point doit être considéré comme un cercle de rayon nul répondant à la question. En effet, ce cercle de rayon nul A figure dans la famille correspondant au groupe OO'. Donc $\overline{CA}^2$ est égal à la puissance μ du point C. De même, il figure dans la famille correspondant au groupe OO'' et $\overline{C'A}^2$ est égal à la puissance de C'. Donc le point A est l'un des sommets du faisceau comprenant le cercle cherché; c'est le cercle de rayon nul du faisceau et il coupe les cercles donnés sous des angles indéterminés; donc il répond à la question. Comme il appartient aux quatre combinaisons, le nombre des solutions non singulières se réduit à quatre qui sont toujours réelles. On peut vérifier la réalité de ces quatre solutions en remarquant que, les deux sommets du faisceau A et B étant réels, et A étant sur le cercle O, si l'on fait l'inversion avec B comme pôle et la puissance de B par rapport à O comme module, A deviendra le second point d'intersection de la droite AB avec le cercle O, de sorte qu'il sera toujours extérieur au cercle concentrique intérieur défini par l'angle α, d'où il suit que les tangentes issues de ce point-là seront réelles.

Si les trois cercles O, O', O'' passent par deux mêmes points, ces points seront les seules solutions du problème, à moins que celui-ci ne soit indéterminé, ce qui arrivera si les centres radicaux des deux familles se confondent. Le problème est encore impossible ou indéterminé si les trois cercles ont un axe radical commun qu'ils ne coupent pas. Ce résultat pourrait être prévu. Si, en effet, les trois cercles O, O', O'' font partie d'un même faisceau, ils sont isogonaux à tous les cercles d'une même famille. Par suite, tous les cercles qui coupent O et O', respectivement sous les angles α et β, couperont O'' sous un même angle. Si cet angle est égal à γ, le problème est indéterminé; sinon, il est impossible, sauf les solutions singulières constituées par les sommets du faisceau. Du reste, ce cas est le seul où le problème devienne indéterminé, car, pour qu'il en soit ainsi, il faut que les cercles O, O', O'' soient isogonaux à tous le scercles de la famille correspondant au groupe OO' et alors les trois cercles O, O', O'' font partie d'un même faisceau.

(*A suivre.*)

SUR UN THÉORÈME ANALOGUE A CELUI DE CARNOT OU GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE JEAN DE CÉVA;

PAR M. LOUIS RAVIER.

On se sert dans ce qui suit de coordonnées rectangulaires.

Soit $f(u, v, w) = 0$ l'équation tangentielle d'une courbe de classe m.

La condition pour que la droite joignant les points

$$x, \quad y, \quad z \qquad (z = 1)$$
$$x_1, \quad y_1, \quad z_1 \qquad (z_1 = 1)$$

soit tangente à cette courbe est

$$f(y_1 z - y z_1,\ z_1 x - z x_1,\ x_1 y - x y_1) = 0.$$

Si x_1, y_1, z_1 sont fixes et x, y, z variables, l'équation (1) représente le faisceau des tangentes issues du point x_1, y_1, z_1 à la courbe $f(u, v, w) = 0$.

Le produit des distances du point x_2, y_2, z_2 $(z_2 = 1)$ aux différents points de rencontre des droites représentées par l'équation (1) avec la droite passant par x_2, y_2, z_2 et ayant pour paramètres de direction α, β, γ $(\alpha^2 + \beta^2 = 1)$ est

$$(-1)^m \frac{f(y_1 z_2 - y_2 z_1,\ z_1 x_2 - z_2 x_1,\ x_1 y_2 - x_2 y_1)}{f(y_1 \gamma - \beta z_1,\ z_1 \alpha - \gamma x_1,\ x_1 \beta - \alpha y_1)}.$$

Nous désignerons

$$f(y_1 z_2 - y_2 z_1,\ z_1 x_2 - z_2 x_1,\ x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

par

$$f(1 = 2)$$

et [en supposant la droite $x_2 y_2 z_2$, $\alpha\beta\gamma$ déterminée par le point x_2, y_2, z_2 et par un autre point $x_3 y_3 z_3$ $(z_3 = 1)$

$$f(y_1 \gamma - \beta z_1,\ z_1 \alpha - \gamma x_1,\ x_1 \beta - \alpha y_1)$$

par

$$f(1, 2 = 3).$$

Cela posé, on remarque immédiatement que

$$f(1 = 2) = (-1)^m f(2 = 1)$$

et que

$$f(1, 2 = 3) = f(1, 3 = 2).$$

Des considérations qui suivent on déduit le théorème suivant analogue à celui de Carnot, et qui peut être regardé encore comme une généralisation du théorème de Jean de Céva.

Si de chacun des sommets d'un polygone quelconque on mène toutes les tangentes possibles à une courbe algébrique, et si l'on prend leurs points de rencontre avec les côtés du polygone ne passant pas par ce sommet, si l'on forme ensuite le produit en grandeur et

en signe des distances des points d'intersection sur le premier côté au premier sommet, puis de ceux sur le second au second sommet, et ainsi de suite; si l'on recommence ensuite en sens inverse, on obtient deux produits toujours égaux en valeur absolue, et qui sont de signes contraires si le nombre des côtés du polygone et la classe de la courbe sont tous deux des nombres impairs.

Soient $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2, \ldots, x_n y_n z_n$ les sommets d'un polygone.

Le premier produit est

$$(-1)^m \frac{f(1=2)}{f(1,2=3)} \times (-1)^m \frac{f(1=3)}{f(1,3=4)} \times \ldots \times (-1)^m \frac{f[1=(n-1)]}{f[1,(n-1)=n]}$$

$$(-1)^m \frac{f(2=3)}{f(2,3=4)} \times \ldots \times (-1)^m \frac{f(2=n)}{f(2,n=1)}$$

....

$$(-1)^m \frac{f(n=1)}{f(n,1=2)} \times \ldots \times (-1)^m \frac{f[n=(n-2)]}{f[n,(n-2)=(n-1)]}$$

Le second n'en diffère qu'en ce que $f(p=q)$ y entre sous la forme $f(q=p)$, et $f(p,q=r)$ sous la forme $f(p,r=q)$. Comme $f(p=q)=(-1)^m f(q=p)$ et que $f(p,q=r)=f(p,r=q)$, le second produit sera égal au premier multiplié par

$$(-1)^{m \times \text{le nombre des facteurs de l'un des produits}}$$

ou si l'on désigne par p le nombre des sommets du polygone $(-1)^{mp(p-2)}$, ce qui confirme l'énoncé donné plus haut.

Applications. — Ce théorème peut en particulier servir à démontrer cette propriété bien connue que :

Les tangentes aux trois points de rebroussement d'une courbe de troisième classe concourent en un même point.

Prenons pour polygone le triangle ayant pour sommets les points de rebroussement.

Soient 11′, 22′, 33′ les tangentes en ces points ; ce sont des tangentes triples, et en appliquant le théorème on trouve

$$\overline{21'}^3 \times \overline{32'}^3 \times \overline{13'}^3 = -\overline{31'}^3 \times \overline{23'}^3 \times \overline{12'}^3$$

ou

$$21' \times 32' \times 13' = -31' \times 23' \times 12'$$

ce qui prouve (réciproque du théorème de Céva) que les droites 11′, 22′, 33′ sont concourantes. C. Q. F. D.

On démontrera de la même manière que :

Quand une conique est circonscrite à un triangle, les points de rencontre des tangentes aux trois sommets avec les côtés opposés sont en ligne droite (on s'appuiera sur la réciproque du théorème de Ménélaüs).

Enfin on peut en déduire, en s'appuyant sur la réciproque du théorème de Carnot appliqué au cas d'une conique et d'un triangle que

Les points de rencontre des tangentes menées des sommets d'un triangle à une conique quelconque tracée dans son plan avec les côtés opposés sont six points d'une même conique.

On pourrait encore en déduire le corrélatif de ce dernier théorème.

ERRATA.

Page 85, lignes 14 et 27, *faire suivre* $X^{(n+q-1)}$ *de* $X^{(n+q)}$.

LA SYMÉTRIE EN COORDONNÉES POLAIRES [1];

PAR M. J. LEFÈVRE,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée d'Amiens.

DEUXIÈME PARTIE.

Nous allons chercher la forme analytique générale des équations des courbes qui présentent les symétries que nous venons d'étudier. Nous supposerons encore la courbe obtenue tout entière par une variation limitée de ω : soit $2\mu\pi$, soit $(2\mu+1)\pi$.

On doit donc avoir, si $f(\rho,\omega)=0$ est l'équation de la courbe,

$$f(\rho,\omega)\equiv k.f(\rho,\omega+2\mu\pi) \quad (^2)$$

ou bien

$$f(\rho,\omega)\equiv k' f[-\rho,(2\mu+1)\pi+\omega].$$

SECTION I. — AXES DE SYMÉTRIE.

Considérons un rayon principal de la première espèce.

On doit avoir

$$f(\rho,\alpha+\omega)\equiv\eta f(\rho,\alpha-\omega).$$

Nous *supposerons* la fonction f telle que *le facteur* η *soit une constante*. L'identité ayant lieu quels que

(1) Voir même Tome, p. 302.

(2) Le facteur k peut être une constante ou une fonction de ρ et ω. Par exemple, si f était par rapport à la variable ω une fonction doublement périodique de deuxième degré ayant $2\mu\pi$ pour une de ses périodes, k serait constant. Si c'était une fonction doublement périodique de troisième espèce, on aurait $k=e^{\alpha\omega+b}$.

soient ρ et ω subsistera si l'on remplace ω par $-\omega$; on a donc

$$f(\rho, \alpha - \omega) \equiv \eta f(\rho, \alpha + \omega);$$

faisons le produit

$$f(\rho, \alpha + \omega) \equiv \eta^2 f(\rho, \alpha + \omega).$$

Ceci exige

$$\eta^2 = 1, \qquad \eta = \pm 1.$$

Mais j'observe d'abord qu'on ne peut avoir ici $\eta = -1$, car pour $\omega = 0$, il viendrait

$$f(\rho, \alpha) \equiv -f(\rho, \alpha) \qquad \text{ou} \qquad f(\rho, \alpha) \equiv 0,$$

quel que soit ρ, tous les points de la droite $\omega = \alpha$ feraient partie de la courbe, ce que nous ne supposons pas.

Il reste donc seulement l'identité

$$\text{(A)} \qquad f(\rho, \alpha + \omega) \equiv f(\rho, \alpha - \omega).$$

De même, pour un rayon principal β de deuxième espèce, il vient

$$f(\rho, \beta + \omega) \equiv \eta f(\rho, \beta - \omega).$$

Changeons ρ et ω en $-\rho$ et $-\omega$,

$$f(-\rho, \beta - \omega) \equiv \eta f(\rho, \beta + \omega).$$

On aura donc

$$\eta = \pm 1.$$

Mais ici il faut généralement conserver les deux signes.

Remarque. — Toutefois si f *considérée comme fonction de* ρ *seulement* est, soit une fonction paire, soit une fonction impaire, on prendra soit $\eta = 1$ ou $\eta = -1$. Nous pouvons toujours écarter ce dernier cas en divisant le premier membre de l'équation par une puissance impaire de ρ convenablement choisie.

Nous aurons donc ici

(B) $f(\rho, \beta + \omega) = \eta f(-\rho, \beta - \omega)$ avec $\eta = \pm 1$.

Donnons maintenant la démonstration analytique du théorème I; nous en déduirons une formule importante.

Soient deux rayons principaux θ et θ' faisant entre eux l'angle φ. Deux rayons R, R_1, symétriques par rapport à θ, donnent

(1) $f(\rho, \theta + \omega) = \eta f(\varepsilon\rho, \theta - \omega)$ avec $\varepsilon = \pm 1$,

suivant que θ est de première ou de deuxième espèce.

Prenons leurs symétriques relativement à θ' $(\varepsilon' = \pm 1)$,

(2) $$\begin{cases} f(\rho, \theta + \omega) = \eta' f(\varepsilon'\rho, \theta + 2\varphi - \omega), \\ f(\rho, \theta - \omega) = \eta' f(\varepsilon'\rho, \theta + 2\varphi + \omega). \end{cases}$$

Ces relations, ayant lieu quel que soit ρ, subsistent si l'on change ρ en $\varepsilon\rho$ simultanément dans les deux membres.

La deuxième peut donc s'écrire

$$f(\varepsilon\rho, \theta - \omega) = \eta' f(\varepsilon\varepsilon'\rho, \theta + 2\varphi + \omega).$$

Reportons dans l'équation (1),

(3) $$f(\varepsilon'\rho, \theta + 2\varphi - \omega) = \eta f(\varepsilon\varepsilon'\rho, \theta + 2\varphi + \omega).$$

On peut encore supprimer, de part et d'autre, le facteur ε',

$$f(\rho, \theta + 2\varphi - \omega) = \eta f(\varepsilon\rho, \theta + 2\varphi + \omega);$$

$\theta + 2\varphi$ est donc bien un rayon principal de même espèce que θ et *avec le même facteur* η.

Corollaire. — Dans l'équation (2), remplaçons le deuxième membre par la valeur (3), on a

$$f(\rho, \theta + \omega) = \eta\eta' f(\varepsilon\varepsilon'\rho, \theta + \omega + 2\varphi)$$

ou, en remplaçant par ω l'angle $\theta + \omega$ qui est quelconque,

$$(C) \qquad f(\rho, \omega) \equiv \eta\eta'^{s} f(\varepsilon\varepsilon'\rho, 2\varphi + \omega),$$

formule fondamentale.

Nous distinguerons encore deux cas, comme dans la première Partie.

Premier cas. — *La courbe est obtenue tout entière en faisant varier ω d'un angle $2\mu\pi$.*

§ I. — *Équation générale des courbes possédant m axes de première espèce.*

J'observe d'abord que m doit être premier avec μ, à moins que l'un de ces deux nombres ne soit égal à l'unité, si, comme nous le supposons toujours, $2\mu\pi$ est l'intervalle le plus réduit possible donnant toute la courbe.

En effet, l'angle de deux rayons principaux consécutifs est

$$\varphi = \frac{\mu\pi}{m}.$$

Supposons pour un instant que m et μ aient un plus grand commun diviseur $d > 1$, de façon que $\begin{cases} m = m_1 d, \\ \mu = \mu_1 d, \end{cases}$ il vient

$$\varphi = \frac{\mu_1}{m_1}\pi.$$

Appliquons m_1 fois de suite la formule (C)

$$f[(\varepsilon\varepsilon')^{m_1}\rho, \omega + 2m_1\varphi] \equiv (\eta\eta')^{m_1} f(\rho, \omega).$$

Mais $2m_1\varphi = 2\mu_1\pi$ et les axes étant de même espèce $\varepsilon\varepsilon' = 1$,

$$f(\rho, \omega + 2\mu_1\pi) \equiv (\eta\eta')^{m_1} f(\rho, \omega),$$

la courbe se reproduirait après un intervalle $2\mu_1\pi$: donc $2\mu\pi$ ne serait pas le plus réduit possible.

Cette démonstration s'appliquerait aussi, on le voit, à des axes de deuxième espèce.

Ceci posé, j'imagine une courbe ayant m axes de première espèce qui passent par le pôle, et je prends l'un d'eux comme axe polaire afin de simplifier. Le rayon principal suivant fait avec lui l'angle $\frac{\mu\pi}{m}$. On devra donc avoir les deux relations

$$(4)\qquad \begin{cases} f(\rho, -\omega) \equiv f(\rho, \omega), \\ f\left(\rho, \frac{\mu\pi}{m} - \omega\right) \equiv f\left(\rho, \frac{\mu\pi}{m} + \omega\right). \end{cases}$$

D'ailleurs, si ces conditions sont remplies, la courbe possédant deux rayons principaux distants de $\frac{\mu\pi}{m}$, on a m dans l'intervalle $\mu\pi$. Cela résulte du théorème I et de ce que la fraction $\frac{\mu}{m}$ est irréductible.

Or il est facile de vérifier que les deux fonctions particulières

$$\begin{cases} u = \rho, \\ v = \cos\frac{m\omega}{\mu} \end{cases}$$

satisfont chacune aux conditions (4) : il en sera donc de même de toute fonction $F(u, v)$ *uniforme* en u et v, et l'équation $F(u, v) = 0$ représente une courbe possédant les m axes de symétrie. Je dis, de plus, que pour l'obtenir tout entière il est nécessaire et suffisant de faire varier ω de $2\mu\pi$.

En effet, m et μ étant premiers entre eux, la plus petite période de $v = \cos\frac{m\omega}{\mu}$ qui soit en même temps multiple entier de π est $2\mu\pi$ si m est impair. C'est $\mu\pi$ si m est pair, mais alors, μ étant impair, il faudrait changer ρ en $-\rho$ avec ω en $\mu\pi + \omega$ et la fonction u changerait : donc on ira encore jusqu'à $2\mu\pi$.

Inversement, je dis que l'équation $F(u, v) = 0$, dans laquelle F est uniforme en u et v, est l'équation générale des courbes ayant m axes de première espèce et obtenues par une variation minima de $2\mu\pi$.

Soit $f(\rho, \omega) = 0$ l'équation d'une pareille courbe, il suffit de montrer que, si l'on exprime ρ et ω en u et v, f devient une fonction uniforme de u et v

$$f(\rho, \omega) = F(u, v).$$

Supposons effectuée la transformation, et soit (u, v) un système de valeurs u et v, on a

$$\rho = u, \qquad \cos\frac{m\omega}{\mu} = v.$$

Posons

$$v = \cos\frac{m\alpha}{\mu},$$

il vient

$$\omega = \frac{2k\mu\pi}{\mu} \pm \alpha.$$

On a ainsi $2m$ valeurs pour ω.

Ainsi, au système (u, v) correspondent $2m$ points du plan. Je dis qu'en ces $2m$ points la fonction $f(\rho, \omega) = F(u, v)$ reprend la même valeur.

Appliquons pour cela k fois la formule (C), il faut y faire

$$\eta = \varepsilon = \varepsilon' = 1, \qquad f(\rho, \omega) \equiv f(\rho, 2k\varphi + \omega).$$

Mais $\varphi = \frac{\mu\pi}{m}$, donc, pour la première série de m points $\omega = \frac{2k\mu\pi}{m} + \alpha$, on a

$$f\left(\rho, \frac{2k\mu\pi}{m} + \alpha\right) \equiv f(\rho, \alpha).$$

Pour la deuxième série de m points

$$f\left(\rho, \frac{2k\mu\pi}{m} - \alpha\right) \equiv f(\rho, -\alpha),$$

et, d'après la première formule (4),

$$= f(\rho, \alpha).$$

Ainsi, pour un système (u, v), $F(u, v)$ n'a qu'une seule valeur $f(\rho, \alpha)$: c'est donc bien une fonction uniforme en u et v (¹).

§ II. — *Équation générale des courbes ayant m axes de deuxième espèce.*

m et μ doivent encore être premiers entre eux à moins que l'un d'eux ne soit égal à 1. De plus, j'observe que le facteur η de la formule (B) n'est pas altéré par une rotation de l'axe polaire, car cette formule exprime simplement que les valeurs de ρ qui correspondent à deux rayons donnés sont égales et de signes contraires, résultat indépendant de l'origine des angles polaires.

On doit avoir, comme tout à l'heure,

$$(5) \qquad \begin{cases} f(\rho, \omega) \equiv \eta f(-\rho, -\omega), \\ f\left(\rho, \dfrac{\mu\pi}{m} + \omega\right) \equiv \eta' f\left(-\rho, \dfrac{\mu\pi}{m} - \omega\right), \end{cases}$$

et, en vertu de la remarque qu'on vient de faire, on peut se borner aux trois cas que voici :

$$1^\circ \begin{cases} \eta = 1, \\ \eta' = 1; \end{cases} \qquad 2^\circ \begin{cases} \eta = -1, \\ \eta' = -1; \end{cases} \qquad 3^\circ \begin{cases} \eta = -1, \\ \eta' = 1. \end{cases}$$

1° $\eta = \eta' = 1$. — Ici nous poserons

$$\begin{cases} u = \rho \sin \dfrac{m\omega}{\mu}, \\ v = \cos \dfrac{m\omega}{\mu}. \end{cases}$$

(¹) Nous avons suivi pour cette démonstration un mode de raisonnement analogue à celui adopté par M. Éd. Goursat dans son Mémoire « Sur les surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier ».

Ces deux fonctions satisfont aux conditions (ρ) pour $\eta = \eta' = 1$.

Et l'on montrerait encore que l'équation *générale* des courbes ayant les propriétés énoncées est

$$F(u, v) = 0,$$

F étant une fonction quelconque uniforme en u et v.

2° $\eta = \eta' = -1$. — Prenons les deux fonctions

$$\begin{cases} u = \rho, \\ v = \tang \dfrac{m\omega}{2\mu}, \end{cases}$$

qui satisfont aux conditions (5) pour $\eta = \eta' = -1$. Si $F(u, v)$ désigne une fonction uniforme quelconque, mais *impaire* en u et v, c'est-à-dire satisfaisant à l'identité $F(-u, -v) \equiv -F(u, v)$, l'équation $F(u, v) = 0$ représente une courbe ayant les propriétés énoncées.

Réciproquement, je dis qu'on a là l'équation générale de ces courbes.

Soit, en effet, $f(\rho, \omega) = 0$ l'une de ces courbes. Exprimons ρ et ω en u et v, il vient

$$\rho = u, \qquad \tang \frac{m\omega}{2\mu} = v.$$

Je pose

$$v = \tang \frac{m\alpha}{2\mu},$$

d'où

$$\frac{m\omega}{2\mu} = k\pi + \frac{m\alpha}{2\mu}, \qquad \omega = \frac{2k\mu\pi}{m} + \alpha,$$

ce qui donne m points du plan correspondant à un couple de valeurs (u, v). Je dis qu'en ces m points $f(\rho, \omega)$ ou $F(u, v)$ reprend la même valeur.

Ici la formule (C) est

$$f(\rho, \omega + 2\varphi) \equiv f(\rho, \omega), \qquad \varphi = \frac{\mu\pi}{m};$$

appliquons-la k fois

$$f\left(\rho, \frac{2k\mu\pi}{m} + \alpha\right) \equiv f(\rho\alpha);$$

$F(u, v)$ reprend bien la même valeur, elle est uniforme.

J'ajoute qu'elle est *impaire* en u et v. Pour cela, je considère le couple $\begin{cases} u' = -u, \\ v' = -v. \end{cases}$ Les valeurs correspondantes du rayon vecteur et de l'angle polaire $\rho'\omega'$, sont

$$\rho' = -\rho, \qquad v' = -v = \text{tang}\left(-\frac{m\alpha}{2\mu}\right),$$

d'où

$$\frac{m\omega'}{2\mu} = k\pi - \frac{m\alpha}{2\mu}, \qquad \omega' = \frac{2k\mu\pi}{m} - \alpha.$$

Mais, d'après ce qui précède,

$$f\left(\rho', \frac{2k\mu\pi}{m} - \alpha\right) = f(\rho', -\alpha) = f(-\rho, -\alpha).$$

Or f satisfait par hypothèse aux conditions (5) et la première donne ici

$$f(-\rho, -\alpha) \equiv -f(\rho, \alpha).$$

Ainsi

$$F(-u, -v) \equiv -F(u, v), \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque I. — La deuxième série de m points forme avec la première un ensemble de $2m$ points ayant la symétrie de deuxième espèce par rapport aux m axes donnés.

Remarque II. — Si m est pair ($m = 2m'$) la fonction $\text{tang}\,\frac{m\omega}{2\mu}$ se réduit à $\text{tang}\,\frac{m'\omega}{\mu}$, mais le raisonnement précédent est toujours vrai.

3° $\eta = -1$, $\eta' = 1$. — On prend

$$\left\{\begin{aligned} u &= \sin \frac{m\omega}{2\mu}, \\ v &= \rho \cos \frac{m\omega}{2\mu} \end{aligned}\right.$$

et une fonction quelconque $F(u, v)$, mais *uniforme* et *impaire,* en u et v.

Réciproquement, $F(u, v) = 0$ est alors l'équation générale cherchée.

§ III. — *Équation générale des courbes possédant m axes de l'une et l'autre espèce.*

On a vu (première Partie) que $m = 2m'$ et qu'il y a m' axes de chaque espèce.

On montrerait, à l'aide du raisonnement déjà suivi, que m' est premier avec μ, à moins que l'un d'eux ne soit égal à l'unité.

1° *Je suppose les rayons principaux simples.* — On ne peut alors avoir à la fois μ et m' impairs.

En effet, la formule (C) est alors

$$f(\rho, \omega) \equiv \eta f(-\rho, \omega + 2\varphi).$$

On a

$$\varphi = \frac{\mu\pi}{m}, \qquad 2\varphi = \frac{\mu\pi}{m'}.$$

Appliquons m' fois cette formule

$$f(\rho, \omega) \equiv \eta^{m'} f[(-\rho)^{m'} \omega + \mu\pi],$$

ou, puisque m' est supposé impair,

$$f(\rho, \omega) \equiv \eta f(-\rho, \omega + \mu\pi).$$

Ainsi l'équation ne changerait pas si l'on changeait ω en $\mu\pi + \omega$ et ρ en $-\rho$, et comme μ est impair, on

aurait toute la courbe en faisant varier ω de o à $\mu\pi$: on serait donc ramené au deuxième cas.

Donc si μ est impair m' est pair. D'ailleurs, si μ est pair, m' est impair puisqu'il est premier avec μ.

Ceci posé, nous avons deux hypothèses à examiner suivant que le facteur η de f relatif à un rayon de deuxième espèce est égal à ± 1.

(a) $\eta = 1$. — Prenons comme axe polaire un rayon de première espèce, il faut que $f(\rho, \omega)$ satisfasse aux deux relations

$$(6)\qquad \begin{cases} f(\rho, \omega) \equiv f(+\rho, -\omega), \\ f\left(\rho, \dfrac{\mu\pi}{m} + \omega\right) \equiv f\left(-\rho, \dfrac{\mu\pi}{m} - \omega\right). \end{cases}$$

Posons

$$\begin{cases} u = \rho^2, \\ v = \rho \cos \dfrac{m'\omega}{\mu}, \end{cases}$$

l'équation générale des courbes dont il s'agit sera

$$F(u, v) = 0,$$

$F(u, v)$ étant une fonction *uniforme* quelconque.

(b) $\eta = -1$. — Prenons comme axe polaire le rayon de deuxième espèce. Ici f doit satisfaire aux conditions

$$(7)\qquad \begin{cases} f(\rho, \omega) \equiv -f(-\rho, -\omega), \\ f\left(\rho, \dfrac{\mu\pi}{m} + \omega\right) \equiv f\left(\rho, \dfrac{\mu\pi}{m} - \omega\right). \end{cases}$$

On a d'abord les fonctions

$$\begin{cases} u = \rho, \\ v = \sin \dfrac{m'\omega}{\mu}, \end{cases}$$

puis toute fonction *uniforme* et *impaire* en u et v, $F(u, v)$.

2° *Tous les rayons principaux sont doubles.* — Nous

avons annoncé dans la première Partie que le nombre m' de ces rayons était *impair*.

Supposons, en effet, qu'il soit pair, $m' = 2m''$, μ serait impair. La formule (C) est alors

$$f(\pm\rho, \omega + 2\varphi) \equiv f(\rho, \omega),$$

appliquons-la m'' fois :

$$f(\pm\rho, \omega + 2m''\varphi) \equiv f(\rho, \omega),$$

mais

$$\varphi = \frac{\mu\pi}{m'}, \qquad 2m''\varphi = \mu\pi \qquad \text{et} \qquad f(\pm\rho, \omega + \mu\pi) \equiv f(\rho, \omega);$$

la courbe se reproduirait au bout de l'intervalle $\mu\pi$, et comme μ est impair, on serait ramené au deuxième cas.

Prenons l'un de ces rayons comme axe polaire; il faut que $f(\rho, \omega)$ satisfasse aux conditions

$$(8) \qquad \begin{cases} f(\rho, \omega) \equiv \eta f(\pm\rho, -\omega), \\ f\left(\rho, \dfrac{\mu\pi}{m'} + \omega\right) \equiv \eta' f\left(\pm\rho, \dfrac{\mu\pi}{m'} - \omega\right). \end{cases}$$

Ces formules montrent que $f(\rho, \omega)$ est d'une parité déterminée par rapport à ρ. On peut toujours la supposer paire, sans quoi on diviserait par une puissance impaire de ρ convenablement choisie; on a alors $\eta = \eta' = 1$, ainsi qu'il résulte d'une remarque faite au commencement de la deuxième Partie.

Nous prendrons alors

$$\begin{cases} u = \rho^2, \\ v = \cos\dfrac{m'\omega}{\mu}, \end{cases}$$

et pour $F(u, v)$ une fonction *uniforme* quelconque.

Deuxième cas. — *La courbe est obtenue tout entière en faisant varier* ω *de* $(2\mu + 1)\pi$.

Il y a alors m' axes de chaque espèce.

Je dis que, si aucun des nombres m' et $2\mu+1$ n'est égal à 1, ces nombres sont premiers entre eux.

Supposons, en effet, qu'ils aient un plus grand commun diviseur $d>1$,

$$\left\{\begin{array}{r} m' = m_1 d, \\ 2\mu+1 = \mu_1 d. \end{array}\right.$$

Soit d'abord m' pair, alors $\varphi = \frac{(2\mu+1)\pi}{m'} = \frac{\mu_1\pi}{m_1}$ (*voir* la première Partie). Appliquons m_1 fois la formule (C),

$$f[(-1)^{m_1}\rho, \omega + 2m_1\varphi] \equiv (\eta\eta')^{m_1} f(\rho, \omega).$$

Mais d est impair comme $2\mu+1$: donc m' étant pair, m_1 l'est aussi; on aurait

$$f(\rho, \omega + 2\mu_1\pi) \equiv f(\rho, \omega),$$

et toute la courbe serait obtenue en faisant varier ω de $2\mu_1\pi$. Mais d qui est impair est au moins égal à 3. $2\mu_1 < \mu_1 d < 2\mu+1$, l'intervalle $(2\mu+1)\pi$ ne serait pas le plus réduit.

Si m' était impair, on appliquerait $2m_1$ fois la formule (C). Puisqu'il y a des axes de chaque espèce, nous aurons les mêmes subdivisions qu'au § III du premier cas.

1° *Je suppose les rayons principaux simples*.—Alors m' est impair.

Nous avons deux hypothèses à examiner suivant que le facteur η de f relatif à un rayon principal de deuxième espèce est égal à ± 1.

(a) $\eta = 1$. — Prenons comme axe polaire un rayon de première espèce, le rayon $\frac{(2\mu+1)\pi}{m}$ sera de deuxième espèce.

Il faut que $f(\rho, \omega)$ satisfasse aux conditions analogues

aux équations (6) :

$$\begin{cases} f(\rho, \omega) \equiv f(\rho, -\omega), \\ f\left[\rho, \dfrac{(2\mu+1)\pi}{m} + \omega\right] \equiv f\left[-\rho, \dfrac{(2\mu+1)\pi}{m} - \omega\right]. \end{cases}$$

Or les deux fonctions

$$\begin{cases} u = \rho^2, \\ v = \rho \cos \dfrac{m'\omega}{2\mu+1} \end{cases}$$

y satisfont et il en est de même d'une fonction uniforme quelconque $F(u, v)$.

De plus, si l'on change ρ en $-\rho$ et qu'on augmente ω de $(2\mu+1)\pi$, u et v ne changent pas puisque m' est impair. Donc la courbe $F(u, v) = 0$ est décrite tout entière et une seule fois, puisque m' est premier avec $2\mu+1$. D'ailleurs, $F(u, v) = 0$ est bien l'équation générale.

(*b*) $\eta = -1$. — Prenons ici comme axe polaire un rayon de deuxième espèce. On a les équations de condition

$$\begin{cases} f(\rho, \omega) \equiv -f(-\rho, -\omega), \\ f\left[\rho, \dfrac{(2\mu+1)\pi}{m} + \omega\right] \equiv f\left[\rho, \dfrac{(2\mu+1)\pi}{m} - \omega\right]. \end{cases}$$

Les fonctions particulières

$$\begin{cases} u = \rho, \\ v = \sin \dfrac{m'\omega}{2\mu+1} \end{cases}$$

y satisfont ainsi qu'une fonction $F(u, v)$ *uniforme* et *impaire* en u et v. D'ailleurs $F(u, v) = 0$ sera l'équation générale des courbes ayant la symétrie en question.

2° *Les rayons principaux sont doubles.* — Alors m' est pair, O est centre de troisième espèce (première Partie). $f(\rho, \omega)$ est une fonction paire en ρ. Elle doit sa-

tisfaire aux équations analogues à (8),

$$\begin{cases} f(\rho, \omega) \equiv f(\pm \rho, -\omega), \\ f\left[\rho, \dfrac{(2\mu+1)\pi}{m'} + \omega\right] \equiv f\left[\pm \rho, \dfrac{(2\mu+1)\pi}{m'} - \omega\right]. \end{cases}$$

On prendra comme fonctions particulières

$$\begin{cases} u = \rho^2, \\ v = \cos \dfrac{m'\omega}{2\mu+1}, \end{cases}$$

et en général une fonction *uniforme* quelconque $F(u, v)$.

Disposition des axes de symétrie. — On peut maintenant établir le résultat suivant :

Dans le premier cas, les axes de symétrie sont simples, dans le deuxième cas ils sont doubles.

D'abord, pour le premier cas, il suffit évidemment de se borner au § III, le seul où il y ait des axes de chaque espèce.

Si un axe était en même temps des deux espèces, il devrait correspondre à la fois à deux rayons principaux de la forme θ et $\theta + (2h+1)\frac{\pi}{2}$ et d'espèce différente, ce qui exigerait, en supposant simples tous les rayons principaux, que $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ fût de la forme $(2h+1)\varphi$ et comme $\varphi = \frac{\mu\pi}{m}$,

$$(2k+1)m' = (2h+1)\mu.$$

D'après cela, μ et m' devraient être tous deux pairs ou tous deux impairs, ce qui est impossible ici.

Si l'on supposait doubles tous les rayons principaux, $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ serait de la forme $h\varphi$, mais $\varphi = \frac{\mu\pi}{m'}$, il viendrait $(2k+1)m' = 2h\mu$, ce qui est encore impossible, m' étant impair.

Dans le deuxième cas, les deux mêmes relations sont, au contraire, toujours possibles d'après la forme de φ.

Résumons maintenant dans un Tableau les divers résultats de cette première Section.

		Premier cas. ω varie de o à $2\mu\pi$.	Deuxième cas. ω varie de o à $(2\mu+1)\pi$.
m axes de première espèce		$F\left(\rho, \cos\frac{m\omega}{\mu}\right) = 0$	
m axes de deuxième espèce	$\eta = \eta' = 1$	$F\left(\rho, \sin\frac{m\omega}{\mu}, \cos\frac{m\omega}{\mu}\right) = 0$	
	$\eta = \eta' = -1$	$F\left(\rho, \tang\frac{m\omega}{\mu}\right) = 0$ (F impaire)	
	$\eta = -1, \eta' = 1$	$F\left(\sin\frac{m\omega}{2\mu}, \rho\cos\frac{m\omega}{2\mu}\right) = 0$ (F impaire)	
m' axes de chaque espèce	Rayons principaux *simples* $\eta = 1$	$F\left(\rho^2, \rho\cos\frac{m'\omega}{\mu}\right) = 0$	$F\left(\rho^2, \rho\cos\frac{m'\omega}{2\mu+1}\right) = 0$
	Rayons principaux *simples* $\eta = -1$	$F\left(\rho, \sin\frac{m'\omega}{\mu}\right) = 0$ (F impaire)	$F\left(\rho, \sin\frac{m'\omega}{2\mu+1}\right) = 0$ (F impaire)
	Rayons principaux *doubles*	$F\left(\rho^2, \cos\frac{m'\omega}{\mu}\right) = 0$	$F\left(\rho^2, \cos\frac{m'\omega}{2\mu+1}\right) = 0$

Section II. — Centre de symétrie.

Si le pôle est centre de symétrie de première ou de deuxième espèce, c'est que ω varie de o à $2\mu\pi$.

Dans la première hypothèse, μ doit être impair, et, d'après la première Partie, $f(\rho, \omega)$ devra satisfaire à l'identité

$$f(\rho, \omega) \equiv k f(\rho, \omega + \mu\pi),$$

le facteur k peut être soit une constante, soit une fonction de ρ et ω.

L'équation générale sera

$$F\left(\rho, \tang \frac{\omega}{\mu}\right) = 0 \quad (\text{F uniforme}).$$

Pour un centre de deuxième espèce, on a l'identité

$$f(\rho, \omega) \equiv k f(-\rho, \mu\pi + \omega),$$

et μ pair.

L'équation générale sera

$$F\left(\rho^2, \rho \cos \frac{\omega}{\mu}\right) = 0 \quad (\text{F uniforme}).$$

Enfin le pôle peut être centre de troisième espèce, il faut pour cela que $f(\rho, \omega)$ soit d'une parité déterminée par rapport à la seule variable ρ.

Section III. — Centre et axes.

On peut enfin comparer la Section I à la première Partie; on est ainsi conduit aux résultats suivants :

Premier cas : ω *varie de* o *à* $2\mu\pi$ (§ I et II). — Les axes étant d'une seule espèce, le pôle ne peut être centre que de première espèce. Pour cela, il faut et il suffit que μ soit impair et m pair.

(§ III). Je dis que *le pôle est toujours un centre de l'une des trois espèces.*

Supposons les rayons principaux *simples*.

Si μ est *impair*, m' est pair, le rayon $\theta + m'\varphi$ est de même espèce que θ, mais $\theta + m'\varphi = \theta + \frac{\mu\pi}{2}$: il est donc perpendiculaire à θ et le pôle est centre de première espèce.

Si μ est *pair*, m' est impair, $\theta + m'\varphi$ est donc d'espèce différente de θ, mais $\theta + \frac{\mu\pi}{2}$ s'applique sur la même direction que θ, les deux axes sont rectangulaires et le pôle est un centre de deuxième espèce.

Enfin, si les rayons principaux sont *doubles*, le pôle est centre de troisième espèce.

Deuxième cas : ω *varie de* 0 *à* $(2\mu + 1)\pi$. — O ne peut être centre que de troisième espèce; il le sera, si les rayons principaux sont doubles, ce qui exige m' pair. D'ailleurs cela suffit.

Section IV. — Équation cartésienne des courbes ayant M axes de symétrie passant par l'origine.

Nous allons montrer que si l'on transforme en coordonnées cartésiennes les différentes équations obtenues précédemment en coordonnées polaires, on obtient une forme unique.

Observons néanmoins que cette transformation pouvant compliquer sigulièrement l'équation de la courbe, il y avait intérêt à étudier la symétrie sur les formes données.

Comme la distinction des axes de symétrie en deux espèces n'a pas lieu d'être faite en coordonnées cartésiennes, M sera simplement le nombre des axes diffé-

rents au point de vue graphique. Je dis que, dans tous les cas de l'étude précédente, la courbe se superpose à elle-même si on la fait tourner de $\frac{2\pi}{M}$ autour du pôle (¹).

Premier cas. — Alors tous les axes de symétrie sont simples, donc $M = m$. Examinons les divers paragraphes.

(§ I et II). D'abord la courbe se superpose à elle-même si on la fait tourner de 2φ. La formule (C) est, en effet,

$$f(\rho, \omega + 2\varphi) \equiv \eta\eta' f(\rho, \omega).$$

Le point M vient en M′ (*fig.* 3). Il suffit donc de montrer qu'une rotation égale à un certain multiple de 2φ est égale à $\frac{2\pi}{M}$, augmenté, s'il le faut, d'un certain nombre de circonférences, ou

$$k.2\varphi = 2h\pi + \frac{2\pi}{m} \qquad \text{ici} \qquad \varphi = \frac{\mu\pi}{m},$$

$$k\mu - hm = 1,$$

m et μ étant premiers entre eux; cette équation peut être résolue par des valeurs entières de h et de k.

(§ III). Le pôle est toujours centre, la formule (C) devient

$$f(-\rho, \omega + 2\varphi) \equiv \eta f(\rho, \omega);$$

elle est relative aux points M et M″ (*fig.* 3). Mais, comme le pôle est centre, le symétrique M′ de M est encore sur la courbe et la courbe se superpose par une rotation égale à 2φ. Une rotation égale à π produirait le même résultat puisque O est centre. On doit donc avoir

$$k.2\varphi = h\pi + \frac{2\pi}{m};$$

(¹) Cette propriété pourrait être posée *a priori* d'après la symétrie au point de vue géométrique pur.

1° Les rayons principaux sont simples, $\varphi = \frac{\mu\pi}{m'}$, $m = 2m'$, $k\mu - hm' = 1$, relation possible;

2° Les rayons principaux sont doubles, $\varphi = \frac{\mu\pi}{m'}$, $k.2\mu - hm' = 1$, relation encore possible, m' étant impair.

Deuxième cas. — Alors les axes de symétrie sont doubles, leur nombre est donc $M = m'$. Je dis qu'il faut encore faire tourner la courbe de $\frac{2\pi}{M} = \frac{2\pi}{m'}$ pour qu'elle se superpose à elle-même :

1° Je suppose simples tous les rayons principaux; alors m' impair, O n'est pas centre, la formule (C) est

$$f(-\rho, \omega + 2\varphi) \equiv \eta f(\rho, \omega).$$

Appliquons-la deux fois, la courbe se superpose par une rotation de 4φ. Il faut donc établir la relation

$$k.4\varphi = 2h\pi + \frac{2\pi}{m'};$$

or

$$\varphi = \frac{(2\mu + 1)\pi}{2m'},$$

donc

$$k(2\mu + 1) - hm' = 1,$$

relation possible en h et k;

2° Je suppose que tous les rayons principaux soient doubles; alors m' est pair, O est centre de troisième espèce, les rotations 2φ ou π superposent la courbe à elle-même, il faut donc établir que

$$k.2\varphi = h\pi + \frac{2\pi}{m'};$$

or

$$\varphi = \frac{(2\mu + 1)\pi}{m'},$$

mais

$$m' = 2m'', \qquad k(2\mu + 1) - hm'' = 1,$$

relation possible.

Ceci posé, soit $\Phi(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe ayant les M axes de symétrie, l'un de ces axes étant pris comme axe des u et oy perpendiculaire à ox.

Appliquons les formules

$$\begin{cases} x = \rho \cos\omega, \\ y = \rho \sin\omega, \end{cases}$$

et soit $f(\rho, \omega) = 0$ l'équation ainsi obtenue. D'après ce qu'on vient de dire des axes, cette fonction $f(\rho, \omega)$ doit satisfaire aux deux conditions

$$(1) \qquad \begin{cases} f(\rho, -\omega) \equiv f(\rho, \omega), \\ f\left(\rho, \omega + \frac{2\pi}{M}\right) \equiv f(\rho, \omega), \end{cases}$$

et cela suffit.

Or les deux fonctions particulières

$$\begin{cases} u = \rho^2, \\ v = \rho^M \cos M\omega, \end{cases}$$

y satisfont et il en sera de même de toute fonction uniforme $F(u, v)$. En reprenant encore le procédé employé au cours de cette étude, on montrerait que $F(u, v) = 0$, dans laquelle $F(u, v)$ est uniforme en u et v est l'équation générale des courbes satisfaisant aux équations (1), c'est-à-dire ayant M axes de symétrie.

Or on a inversement

$$\rho^2 = x^2 + y^2,$$

et la formule de Moivre donne immédiatement

$$\rho^M \cos M\omega = x^M - \frac{M(M-1)}{1.2} x^{M-2} y^2 + \ldots.$$

L'équation cartésienne cherchée est donc enfin

$$F\left[x^2+y^2,\ x^M - \frac{M(M-1)}{1.2}x^{M-2}y^2 + \frac{M(M-1)(M-2)(M-3)}{1.2.3.4}x^{M-4}y^4 - \ldots\right] = 0 \quad (^1).$$

SUR LE LIEU DES SOMMETS DES ANGLES CONSTANTS CIRCONSCRITS OU NORMAUX A UNE ÉPICYCLOIDE. APPLICATION A LA DÉMONSTRATION PUREMENT GÉOMÉTRIQUE DE PROPRIÉTÉS DE LA CYCLOIDE, DE LA CARDIOIDE ET DES HYPOCYCLOIDES A TROIS ET QUATRE REBROUSSEMENTS;

PAR M. LOUCHEUR,
Élève à l'École Polytechnique.

Dans son *Aperçu historique* (2e édition, p. 125; 1875), Chasles a *énoncé* que le lieu des sommets des angles constants circonscrits à une épicycloïde ordinaire était une épicycloïde.

Nous allons donner de ce théorème une démonstration qui nous permettra de retrouver géométriquement des propriétés de quelques courbes remarquables.

Mais, au préalable, nous allons faire une petite remarque de Géométrie cinématique, qui nous servira plusieurs fois par la suite.

Remarque de Géométrie cinématique.

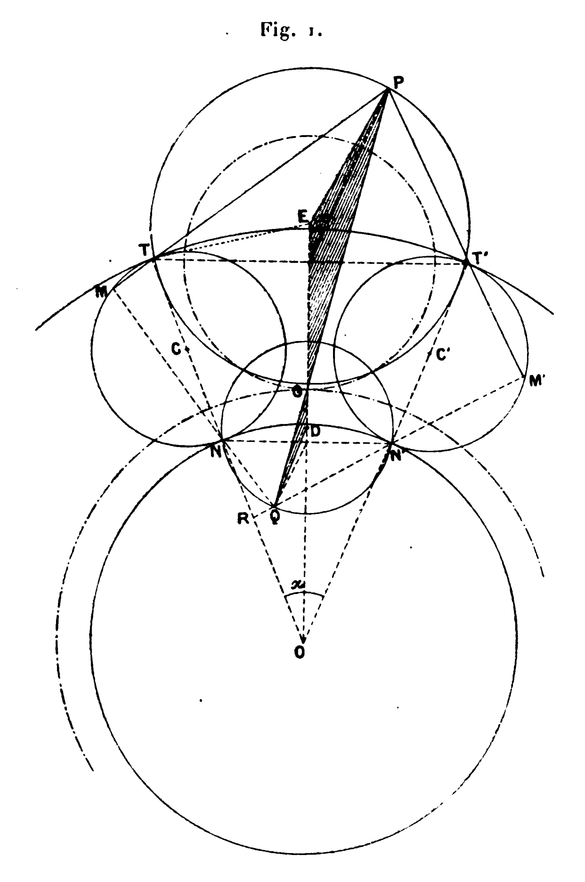
Soit un cercle mobile C *roulant* sur un cercle fixe O, et soit M un point invariablement lié à ce cercle.

---

(1) On trouvera, dans le Mémoire déjà cité de M. Goursat, cette formule, à laquelle il parvient par d'autres considérations.

Soit un second cercle fixe, de même centre O, de rayon quelconque Oν, et un second cercle mobile, tangent à ce cercle (O, Oν) et de centre γ.

Fig. 1.



Supposons que, dans un problème, à chaque position du cercle C corresponde une position du cercle γ; à chaque position du point M une position d'un point μ; supposons de plus que l'on ait les quatre condi-

tions

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{O\nu}{\nu\gamma} = \frac{ON}{NC},\\ &\widehat{MCN} = \widehat{\mu\gamma\nu} + \text{const.},\\ &\mu\gamma = \text{const.},\\ &\text{angle } \widehat{CO\gamma} = \text{const.} \end{aligned}\right.$$

Je dis que le cercle (γ) roule sur le cercle $(O, O\nu)$.

En effet (γ) roulera sur $(O, O\nu)$ si l'on a, en appelant $d\nu$ un déplacement angulaire quelconque du point de contact ν,

$$(1) \qquad O\nu \times d\nu = \nu\gamma \times d(\widehat{\mu\gamma\nu}).$$

D'autre part, (C) roule sur (O). On a donc

$$(2) \qquad ON \times d(N) = CN \times d(\widehat{MCN}).$$

On voit donc qu'à cause de la relation (2) et des conditions supposées la relation (1) est satisfaite.

Donc le cercle (γ) roule sur le cercle $(O, O\nu)$.

Théorème. — *Le lieu des sommets des angles constants circonscrits à une épicycloïde ordinaire est une épicycloïde.*

Soient deux positions C et C' du cercle mobile, roulant sur le cercle O; M et M' les positions correspondantes du point décrivant l'épicycloïde; MT et M'T' les tangentes à la courbe se coupant en P; MN, M'N' les normales se coupant en Q.

1° Évaluons l'angle $\widehat{TOT'}$, que nous désignerons par (α), en fonction des angles $\widehat{MTN}$ ou (φ) et $\widehat{M'T'N'}$ ou (φ').

Soient (R) le rayon ON, (r) le rayon CN. On a

$$\alpha = \widehat{NRN'} - \widehat{ON'R},$$

ou

$$\alpha = (\pi - \widehat{RNQ} - \widehat{NQR}) - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi'\right).$$

$\widehat{NQR}$ est l'angle des deux tangentes MT et M'T', angle que nous désignerons par θ; d'où

$$(3) \qquad \alpha = \varphi + \varphi' - \theta.$$

D'autre part, le cercle C roulant sur le cercle O, on a

$$(4) \qquad 2r[\pi - (\varphi + \varphi')] = R\alpha;$$

d'où

$$(5) \qquad \alpha = \frac{2r(\pi - \theta)}{R + 2r}.$$

Donc, si θ est constant, quel que soit le point M considéré, α est aussi constant.

2° En second lieu, menons PQ qui est la normale au lieu cherché, et traçons les cercles circonscrits aux triangles TPT' et NQN'.

Soient E et D leurs centres et soit G le point de rencontre de PQ et de EDO.

D'après ce que nous venons de voir, les longueurs TT' et NN' sont constantes.

De cette propriété, et de ce que les angles en P et Q sont supplémentaires, on déduit immédiatement que les rayons EP, DQ ont des longueurs constantes, sont parallèles, et que l'on a

$$\frac{EP}{DQ} = \frac{TT'}{NN'} = \frac{R + 2r}{R}.$$

Par suite, les deux triangles PEG et QDG sont sem-

blables, ce qui donne

$$\frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{GD}} = \frac{\mathrm{EP}}{\mathrm{DQ}} = \frac{\mathrm{R} + 2r}{\mathrm{R}},$$

et, comme les longueurs OD, OE, DE sont fixes, il en résulte que OG et GE sont constants.

Je dis que le rapport $\frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{GE}}$ est égal à $\frac{\mathrm{R}}{r}$.

On trouve, en effet, très facilement les expressions suivantes

$$\mathrm{OD} = \mathrm{R}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cot\theta\right),$$

$$\mathrm{DE} = 2r\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cot\theta\right);$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{OG} = \left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cot\theta\right)\frac{\mathrm{R}(\mathrm{R}+2r)}{\mathrm{R}+r},$$

$$\mathrm{EG} = \left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cot\theta\right)\frac{r(\mathrm{R}+2r)}{\mathrm{R}+r}.$$

Donc

$$\frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{GE}} = \frac{\mathrm{R}}{r}.$$

3° Il est également très facile de voir que

$$\widehat{\mathrm{PEG}} = \widehat{\mathrm{MCN}} + \text{const.}$$
$$= \pi + 2\varphi - (\alpha + \theta).$$

4° On en conclut que toutes les conditions énoncées dans la remarque préliminaire de Géométrie cinématique sont remplies et le point P engendre une épicycloïde, allongée ou raccourcie, le cercle fixe étant le cercle (O, OG), le cercle mobile étant le cercle (E, EG).

Le théorème est donc démontré.

Il est bien évident que l'on peut recommencer la même démonstration dans le cas d'une *hypocycloïde*,

c'est-à-dire quand le cercle C roule à l'intérieur du cercle O, et trouver comme précédemment les éléments de l'hypocycloïde lieu cherché.

Nous insisterons, en particulier, sur ce que pour la valeur de l'angle α, il suffit, dans ce cas, de remplacer $R + 2r$ par $R - 2r$ dans l'expression trouvée précédemment. On réunira les deux cas dans l'énoncé suivant :

Considérons le second cercle fixe auquel reste tangent le cercle mobile engendrant *l'hypocycloïde.* / *l'épicycloïde.* *Soit* T *un point pris sur ce cercle fixe et* M *le point correspondant de la courbe; on trouvera le point* T′ *de contact d'un cercle mobile donnant lieu à une tangente faisant avec celle en* M *l'angle* θ *donné, en prenant sur ce cercle fixe un arc égal à* $2r(\pi - \theta)$.

Application à la cycloïde.

Les formules données précédemment pour les quantités caractéristiques de l'épicycloïde lieu de P montrent que, quand le rayon R est infini, le lieu de P est une cycloïde allongée, ordinaire ou raccourcie.

La distance TT′ est alors égale à

$$2r(\pi - \theta).$$

Application à la cardioïde.

On sait que la *cardioïde* est une épicycloïde ordinaire où $R = r$.

Un limaçon de Pascal est une épicycloïde non ordinaire correspondante.

Théorème I. — *Le lieu des sommets des angles*

constants circonscrits à une cardioïde est un limaçon de Pascal.

En effet, le rapport des rayons des deux cercles fournissant l'épicycloïde, lieu cherché, est (comme on l'a vu précédemment) égal à

$$\frac{R}{r},$$

c'est-à-dire l'unité dans le cas actuel.

Théorème II. — *Étant donnée une tangente* MP *à la cardioïde, il existe trois tangentes perpendiculaires à* MP, *et deux autres tangentes parallèles à cette droite. Si l'on joint le point de rebroussement* A *de la cardioïde aux six points de contact, les six droites obtenues font entre elles* 60°.

Pour démontrer ce théorème, bien connu, il suffit de supposer θ égal à 90°. La formule

$$\alpha = \frac{2r(\pi - \theta)}{R + 2r}$$

donne alors

$$\alpha = 60°.$$

Si l'on joint AM et AM', l'angle $\widehat{MAM'}$ est égal à l'angle TOT' ou à 60°, ce qui démontre le théorème.

Théorème III. — *La développée de la cardioïde est une cardioïde trois fois plus petite.*

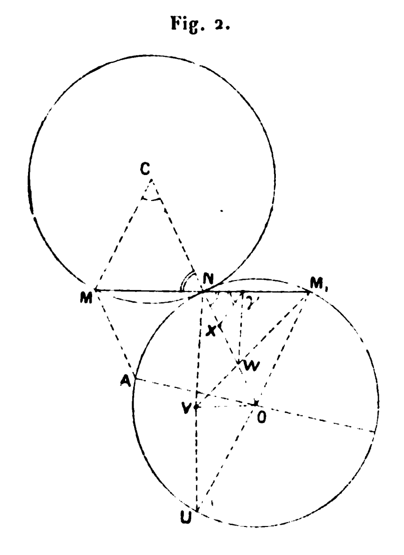
Nous allons démontrer cette propriété, bien connue également, en nous appuyant sur la remarque de Géométrie cinématique posée au début de cette étude.

Cherchons d'abord le centre de courbure de la cardioïde en M (*fig.* 2). En appliquant pour trouver ce point la méthode exposée dans le *Cours de Géométrie*

cinématique de M. Mannheim on obtient la construction suivante :

On mène NU *perpendiculaire à* NM_1 ; *on mène* OV *parallèle à* NM_1 ; *on joint* VM_1 *qui rencontre* ON *en* W ;

Fig. 2.



on projette W *en* γ *sur* NM_1. *Le point* γ *est le point cherché.*

Le triangle NUM_1 donne de suite

$$N\gamma = \frac{2}{3} MN,$$

propriété analogue à celle du centre de courbure de la cycloïde.

Conclusion. — Le lieu du point W est un cercle de rayon $\frac{r}{3}$.

Décrivons le cercle sur NW comme diamètre. Appe-

lons X son centre. On a

$$\gamma XW = \pi - \widehat{MCN}.$$

Donc toutes les conditions de la remarque préliminaire sont remplies : le cercle (N, γ, W) roule sur le cercle (O, OW), et le point γ qui est sur ce cercle décrit une cardioïde.

THÉORÈME IV. — *La longueur de la cardioïde est de huit fois le rayon du cercle qui l'engendre.*

Ce théorème se déduit immédiatement du précédent, au moyen de la relation connue entre la variation de longueur du rayon de courbure et la longueur de l'arc de développée correspondante.

Autre application de la formule donnant la valeur de l'angle α.

THÉORÈME GÉNÉRAL SUR LES ÉPICYCLOIDES ET HYPOCYCLOIDES A n REBROUSSEMENTS. — *Si l'on fait tourner autour du centre du cercle fixe un angle égal à celui de deux tangentes consécutives de rebroussement, c'est-à-dire égal à $\frac{2\pi}{n}$, l'angle des tangentes à la courbe, aux deux points où elle est rencontrée par les deux côtés de l'angle mobile, est aussi égal à $\frac{2\pi}{n}$.*

Supposons R égal à nr et rappelons la formule

$$(\text{I})\,\alpha = \frac{2r(\pi - \theta)}{R \pm 2r}.$$

Supposons

$$\theta = \frac{2\pi}{n}.$$

On déduit immédiatement

$$\theta = \frac{2\pi}{n}.$$

Ainsi, si l'angle TOT' est égal à $\frac{2\pi}{n}$, l'angle des deux tangentes MT, M'T' est aussi égal à $\frac{2\pi}{n}$.

Mais il est évident que, *puisque* $\frac{2\pi}{n}$ *est l'angle des deux tangentes de rebroussement consécutives*, l'angle MOM' est aussi égal à $\frac{2\pi}{n}$.

Le théorème est donc démontré.

Application. — Considérons une hypocycloïde à quatre rebroussements. On retrouve alors un théorème trouvé et démontré *analytiquement* par M. Rat (*Journal de Mathématiques spéciales*; 1887) :

Si l'on fait tourner un angle droit autour du centre de la courbe, les tangentes aux points de rencontre des côtés avec la courbe sont rectangulaires.

Remarque. — On eût pu regarder ce théorème comme évident, car on peut dire qu'une épicycloïde à n rebroussements est (si l'on peut ainsi parler) une courbe périodique de période angulaire égale à $\frac{2\pi}{n}$.

On a voulu, en le démontrant comme on l'a fait, donner une simple application de la formule générale fournissant la valeur de l'angle α.

Hypocycloïde à trois rebroussements.

Enfin, on nous permettra de citer encore comme application de cette même formule la démonstration de la propriété suivante : le cercle inscrit et le cercle passant

par les points de rebroussement de l'hypocycloïde à trois rebroussements sont les lieux des sommets des angles droits circonscrits et normaux à cette courbe.

Il suffit de remarquer que dans ce cas particulier de

$$R = 3r \qquad \text{et} \qquad \theta = 90^\circ,$$

on a

$$\alpha = 180^\circ.$$

Une simple inspection de la figure permet alors de retrouver cette propriété et plusieurs autres de cette courbe remarquable.

SUR LES CENTRES DE COURBURE;

PAR M. HENRI PILLEUX,

Élève de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand.

PROBLÈME. — *Un angle droit tournant autour de son sommet intercepte sur deux courbes* S *et* S′ *une sécante variable* MM′. *Trouver le point* c *où cette droite touche son enveloppe.*

Transformons la figure par polaires réciproques par rapport à un cercle de centre O. On a comme pôle de MM′ le sommet mm' d'un angle droit dont les côtés m et m' sont tangents à deux courbes Σ et Σ′. Cherchons la tangente à la courbe tracée par ce point.

Par la Cinématique, on l'obtient ainsi :

Les normales en t et t' donnent un point i qui, joint au point mm', donne la perpendiculaire à la tangente c.

En revenant à la figure primitive, on a le point c par la construction suivante :

Dans le triangle OMM′, la tangente en M, la tangente en M′ et la droite ON perpendiculaire à Oc coupent res-

pectivement les côtés opposés en trois points A, A′ et N, qui sont une droite I.

Il est donc facile d'avoir N au moyen de cette droite et par suite *c*.

Réciproquement. — Ayant *c* et la tangente en M, on a la tangente en M′, car la droite I est alors déterminée par A et N, ce qui donne A′.

Généralisation. — On peut, par une projection, remplacer les droites rectangulaires issues de O par les rayons homologues de deux faisceaux en involution.

Applications. — *Centre de courbure de la podaire d'une courbe.*

La normale en M s'obtient par une construction connue. Dans le triangle MOI, on a la tangente en M. Donc, si l'on avait la tangente en I, on pourrait avoir le point *c* où MI touche son enveloppe. Or I trace la podaire de la développée de la courbe S; donc, si l'on a le centre de courbure γ de la courbe S, on a la tangente en I et, par suite, le point *c* par six lignes de construction.

Exemple : Centre de courbure du limaçon de Pascal (podaire de cercle). Ici γ est le centre du cercle dont on prend la podaire.

Centre de courbure de l'antipodaire d'une courbe.

Ayant *c*, on peut avoir N, par suite A′ et par suite γ.

Exemple : Coniques (antipodaires de cercle).

Centre de courbure des conchoïdes.

On a la normale MI par une construction connue. Si l'on considère le triangle rectangle IOM, on a la tangente

en M; donc pour savoir où MI touche son enveloppe, il suffit de connaître le point où la tangente en I coupe OM. On a ce point A′ facilement au moyen du triangle POI dans lequel on connaît la tangente en S et le point γ où PI touche son enveloppe. Ayant A′, on a le point c par la construction ordinaire.

Généralisation. — Au lieu de deux faisceaux en involution, issus d'un point O, considérons deux faisceaux homographiques dont les rayons doubles sont Oi et Oj. Nous aurons le point c où MM′ touche son enveloppe, en transformant la construction de la tangente à la courbe lieu des points d'où l'on voit deux courbes sous un angle constant. Cela donne l'énoncé suivant :

La droite OA′, conjuguée de OM′ par rapport à Oi et Oj, coupe la tangente en M′ en un point A′.

La droite OA, conjuguée de OM par rapport à Oi et Oj, coupe la tangente en M en un point A.

La droite ON, conjuguée de Oc par rapport à Oi et Oj, coupe MM′ en un point N; A, A′ et N sont en ligne droite.

Ceci s'applique à un angle de grandeur constante tournant autour de son sommet : Oi et Oj sont alors les droites isotropes.

SUR LA CONSTRUCTION DES CUBIQUES CUSPIDALES PAR POINTS ET TANGENTES;

Par M. M. D'OCAGNE.

---

1. Les cubiques cuspidales sont des courbes unicursales qui sont à la fois du troisième ordre et de la troisième classe. Elles possèdent un point d'inflexion et un point de rebroussement.

Appelons I le point d'inflexion et R le point de rebroussement d'une cubique cuspidale donnée. Soit T le point où se rencontrent les tangentes en ces points. Si l'on pose

$$\text{IR} = a, \qquad \text{IT} = b,$$

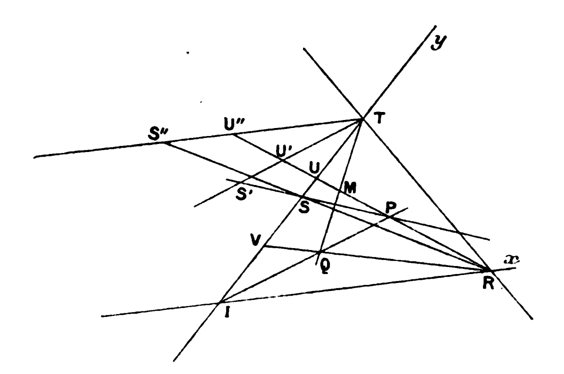
l'équation de la cubique considérée, lorsqu'on prend IR pour axe des x et IT pour axe des y, est de la forme

$$(1) \qquad (bx + ay - ab)^2 x = \lambda y^3.$$

Il suffit donc de connaître, en outre du triangle IRT, un élément simple de la courbe, point ou tangente pour que celle-ci soit complètement déterminée.

Je me propose de faire voir comment la courbe peut alors être construite par points et tangentes.

2. Prenons dans le plan du triangle IRT un point M quelconque. Tirons la droite RM qui coupe IT en U et



prenons sur IT le point V *isotomique* de U (c'est-à-dire tel que U et V soient symétriques par rapport au milieu de IT). Les droites RV et TM se rencontrent en un point Q et la droite IQ coupe RU en P ([1]). Je vais dé-

([1]) C'est en étudiant la transformation géométrique qui, répétée

montrer que, *lorsque le point* M *décrit une droite passant par le point* T, *le point* P *décrit une cubique cuspidale répondant à la question.*

Soient x, y les coordonnées du point P; x', y' celles du point M.

L'équation de la droite RM est

$$(2) \qquad Y(x'-a) = y'(X-a).$$

Faisant dans cette équation $X = 0$, on a, pour valeur de IU,

$$IU = -\frac{ay'}{x'-a}.$$

Par suite,

$$IV = IT - IU = b + \frac{ay'}{x'-a} = \frac{bx' + ay' - ab}{x'-a},$$

et il vient pour équation de RV

$$\frac{X}{a} + \frac{Y(x'-a)}{bx' + ay' - ab} = 1$$

ou

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &X(bx' + ay' - ab) \\ &\quad + Ya(x'-a) - a(bx' + ay' - ab) = 0. \end{aligned} \right.$$

Quant à l'équation de TM, elle s'écrit immédiatement

$$(4) \qquad X(y'-b) - x'(Y-b) = 0.$$

Faisons la somme de ces deux dernières équations après avoir multiplié la seconde par $\frac{a(bx' + ay' - ab)}{bx'}$, de façon à faire évanouir le terme constant; nous avons

---

deux fois, donne cette construction que j'ai été amené aux résultats qui suivent. J'ai pensé qu'il y avait intérêt à publier ceux-ci à part, en raison de l'importance que présentent les cubiques cuspidales, mais je me réserve de revenir sur l'étude de la transformation en question prise dans toute sa généralité.

ainsi pour équation de IQ, après réductions,

$$(5)\qquad (bx'+ay'-ab)^2 X - a^2 x'y' Y = 0.$$

Le point $M(x, y)$ se trouvant à la fois sur RM et sur IQ, ses coordonnées doivent satisfaire à (2) et à (5), ce qui donne

$$(6)\qquad y(x'-a) = y'(x-a),$$

$$(7)\qquad (bx'+ay'-ab)^2 x - a^2 x'y' y = 0.$$

Mais, le point P décrivant une droite issue de l'origine I, on a encore

$$(8)\qquad y' = mx'.$$

Pour avoir le lieu décrit par le point M, il faut éliminer x' et y' entre ces trois équations.

De (6) et (8) on tire aisément

$$x' = \frac{-ay}{mx-y-ma}, \qquad y' = \frac{-may}{mx-y-ma}.$$

Portant ces valeurs de x' et de y' dans (7), on obtient, après des réductions faciles,

$$(bx+ay-ab)^2 x = \frac{a^2}{m} y^3.$$

Il suffit de rapprocher cette équation de l'équation (1) pour s'assurer que la proposition se trouve établie.

3. On déduit immédiatement de là la construction de la cubique cuspidale dont on connaît le point d'inflexion I, le point de rebroussement R, les tangentes IT et RT en ces points, et un point quelconque P_0.

En effet, on peut construire le point M_0, qui, en vertu de la transformation précédente, correspond au point P_0. Il n'y a plus ensuite qu'à prendre un point quelconque M sur la droite AM_0, pour avoir par cette transformation un point P de la cubique cuspidale.

4. Voyons maintenant comment on peut en même temps obtenir la tangente en chaque point P de la courbe.

Pour cela j'établirai le théorème suivant :

Si la tangente IT *au point d'inflexion coupe* PR *au point* U *et la tangente en* P *au point* S, *on a, pour le rapport anharmonique des points* I, U, T, S, *la valeur*

$$(\text{IUTS}) = \frac{\text{TI} \times \text{SU}}{\text{TU} \times \text{SI}} = -\frac{1}{2}\ (^1).$$

L'équation de la droite RP étant

$$\frac{Y}{X-a} = \frac{y}{x-a},$$

on a

$$\text{IU} = \frac{ay}{a-x}.$$

La tangente PS a pour équation

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{dy}{dx}.$$

Mais de l'équation (1), on tire,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\,\frac{3bx+ay-ab}{3bx+ay-3ab}.$$

L'équation précédente devient donc

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{y}{x}\,\frac{3bx+ay-ab}{3bx+ay-3ab}.$$

Faisant $X = 0$, on a

$$\text{IS} = y - y\,\frac{3bx+ay-ab}{3bx+ay-3ab} = \frac{-2aby}{3bx+ay-3ab}.$$

---

(1) J'ai présenté ce théorème à la *Société mathématique de France* dans la séance du 20 mai 1891.

Il vient, dès lors,

$$\mathrm{TI} = -\mathrm{IT} = -b,$$
$$\mathrm{TU} = \mathrm{IU} - \mathrm{IT} = \frac{ay}{a-x} - b = \frac{bx+ay-ab}{a-x},$$
$$\mathrm{SU} = \mathrm{IU} - \mathrm{IS} = \frac{ay}{a-x} + \frac{2aby}{3bx+ay-3ab}$$
$$= \frac{ay(bx+ay-ab)}{(a-x)(3bx+ay-3ab)},$$
$$\mathrm{SI} = -\mathrm{IS} = \frac{2aby}{3bx+ay-3ab}.$$

On en déduit

$$(9) \qquad \frac{\mathrm{TI}\times\mathrm{SU}}{\mathrm{TU}\times\mathrm{SI}} = -\frac{1}{2}.$$

Ce qui démontre le théorème.

On déduit immédiatement de ce théorème que *si l'on considère une famille de cubiques cuspidales ayant mêmes points d'inflexion et de rebroussement et mêmes tangentes en ces points et qu'on les coupe par une droite issue du point de rebroussement, les tangentes aux divers points d'intersection concourent toutes en un même point de la tangente d'inflexion.*

5. Le rapport anharmonique (IUTS) étant projectif, projetons-le du point P sur la parallèle menée par T à PI, en (I'U'TS'). Le point I' étant à l'infini, on a $\frac{\mathrm{TI'}}{\mathrm{S'I'}} = 1$, et il vient

$$\frac{\mathrm{S'U'}}{\mathrm{TU'}} = -\frac{1}{2}$$

ou

$$\mathrm{U'S'} = \frac{\mathrm{TU'}}{2}.$$

De là la construction suivante pour la tangente en P :

Si la parallèle menée par T *à la droite qui joint le*

point P *au point d'inflexion* I *coupe en* U′ *la droite qui joint le point* P *au point de rebroussement* R, *il suffit de prolonger le segment* TU′ *de la moitié* U′S′ *de sa longueur pour avoir la tangente* PS′ *en* P.

6. Projetons maintenant le rapport anharmonique (IUTS) à partir du point R sur la parallèle menée par T à RI en (I″U″T S″). Le point I″ étant à l'infini, on a $\frac{TI''}{S''I''} = 1$, et il vient

$$\frac{S''U''}{TU''} = -\frac{1}{2}$$

ou

$$U''S'' = \frac{TU''}{2}.$$

De là la construction suivante pour le point de contact P lorsque la tangente PS est donnée :

La droite qui joint le point de rebroussement R *au point de rencontre* S *de la tangente donnée et de la tangente* IT *au point d'inflexion* I, *coupant au point* S″ *la parallèle menée par le point* T *à la droite* RI, *il suffit de prendre le point* U″ *tel que* $TU'' = \frac{2}{3} TS''$ *et de tirer* RU″. *Cette droite coupe la tangente donnée au point de contact* P *cherché.*

Lors donc qu'en outre du triangle IRT on donne, pour déterminer la cubique cuspidale, non plus un point, mais une tangente, il suffit, par la construction qui vient d'être énoncée, de construire le point de contact de cette tangente pour être ramené au cas précédent.

7. On peut encore au sujet de la formule (9), faire les remarques suivantes :

1° Prenons sur la cubique le point P_1 tel que RP_1 soit parallèle à IT ; le point U est alors rejeté à l'infini,

et la formule (9) se réduit à

$$\frac{TI}{S_1 I} = -\frac{1}{2}.$$

On a donc ce théorème :

Si la parallèle à la tangente d'inflexion menée par le point de rebroussement coupe la cubique cuspidale au point P_1, *la tangente en* P_1 *coupe la tangente d'inflexion en un point* S_1 *tel que* $IS_1 = 2\,TI$.

2° Considérons maintenant le point P_2 où la tangente est parallèle à la tangente d'inflexion IT. Dans ce cas, c'est le point S_2 qui est rejeté à l'infini, et la formule (9) se réduit à

$$\frac{TI}{TU_2} = -\frac{1}{2}.$$

De là ce théorème :

La droite qui joint le point de rebroussement au point P_2, *où la tangente est parallèle à la tangente d'inflexion, coupe celle-ci en un point* U_2 *tel que* $TU_2 = 2\,IT$.

On voit que ce point U_2 est la symétrique du point S_1 précédemment défini par rapport au milieu de IT.

3° Lorsque le point d'inflexion est à l'infini, la formule (9) se réduit à

$$\frac{SU}{TU} = -\frac{1}{2}.$$

Donc, pour les cubiques cuspidales ayant une asymptote d'inflexion :

Si l'asymptote d'inflexion coupe en T *la tangente au point de rebroussement* R, *en* U *la droite* PR *et en* S *la tangente en* P, *on a* $US = \frac{TU}{2}$.

4° Enfin, si le point T est rejeté à l'infini, la formule (9) devient

$$\frac{SU}{SI} = -\frac{1}{2}.$$

Donc :

Si, dans une cubique cuspidale, les tangentes au point d'inflexion I *et au point de rebroussement* R *sont parallèles, la tangente au point d'inflexion coupe la droite* PR *en un point* U *et la tangente en* P *en un point* S, *tels que* $IS = \frac{2}{3} IU$.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1891;

Solution par M. le Capitaine E.-N. BARISIEN.

Soit (E) *une ellipse qui, rapportée à ses axes a pour équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et soient x_0, y_0 *les coordonnées d'un point* M *du plan de cette ellipse : on considère le cercle* (C) *passant par le point* M *et les points de contact* P, Q *des tangentes à l'ellipse issues du point* M.

1° *Le cercle* (C) *rencontre l'ellipse en deux autres points* P′ *et* Q′; *prouver que les tangentes à l'ellipse en ces deux points se coupent en un point* M′ *situé sur le cercle; montrer que par* M, M′ *et les deux foyers réels on peut faire passer un cercle; de même par* M, M′ *et les deux foyers imaginaires.*

2° *Soient* I, I′, I″ *les points où se coupent respectivement les droites* PQ, P′Q′, *les droites* PQ′, P′Q, *enfin*

les droites PP′, QQ′ : *on suppose que le point* M *reste fixe et que l'ellipse* (E) *se déforme en gardant les mêmes foyers; on demande les lieux décrits par les points* I, I′ *et* I″; *on propose enfin de montrer que tout cercle passant par les points* I′, I″ *est orthogonal au cercle décrit sur* MM′ *comme diamètre.*

I. Désignons les coordonnées du point M′ par x_1, y_1. Les polaires PQ et P′Q′ des points M et M′ par rapport à l'ellipse (E) ont pour équation

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0.$$

L'équation générale des coniques passant par P, Q, P′, Q′ est donc

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \\ &\quad + \left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1\right)\left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

En exprimant que cette conique passe par le point M, on a la relation

$$(2) \qquad \lambda + \left(\frac{x_1 x_0}{a^2} + \frac{y_1 y_0}{b^2} - 1\right) = 0,$$

après avoir supprimé le facteur $\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right)$ qui est différent de zéro.

Or cette relation (2) est obtenue aussi en exprimant que la conique (1) passe par le point M′.

Il en résulte donc que l'on peut définir la propriété générale suivante, dont celle de l'énoncé n'est qu'un cas particulier.

Si l'on considère les points d'intersection d'une

ellipse (E) *avec deux droites* (D) *et* (D′), *la conique passant par ces points d'intersection et par le pôle de* (D) *passe aussi par le pôle de* (D′).

Exprimons maintenant que la conique (1) est un cercle, nous aurons les deux conditions

$$(3) \qquad \frac{a^2\lambda + x_1 x_0}{a^4} = \frac{b'\lambda + y_1 y_0}{b^4},$$

$$(4) \qquad x_1 y_0 + x_0 y_1 = 0.$$

L'élimination de λ entre (2) et (3) donne la relation

$$(5) \qquad x_1 x_0 - y_1 y_0 = c^2.$$

De (4) et (5) on déduit les coordonnées $x_1 y_1$ de M′ en fonction des coordonnées x_0, y_0 de M. On a

$$(6) \qquad x_1 = \frac{c^2 x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \qquad y_1 = -\frac{c^2 y_0}{x_0^2 + y_0^2}.$$

On peut remarquer, en désignant par O le centre de l'ellipse (E), que la condition (4) exprime que les droites PQ, P′Q′ ou leurs diamètres conjugués OM, OM′ sont également inclinés sur les axes, propriété connue des droites d'intersection d'un cercle et d'une ellipse.

On remarque aussi que les relations (6) donnent

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_0^2 + y_0^2) = c^4,$$

c'est-à-dire

$$\text{OM}.\text{OM}' = c^2 = \text{const.},$$

quel que soit le point M.

L'équation générale d'un cercle passant par les foyers réels de l'ellipse (E) est

$$x^2 + y^2 + 2By - c' = 0.$$

Voyons si ce cercle peut passer à la fois par M et M′.

Si cela est possible, il faut que l'on ait

$$x_0^2 + y_0^2 + 2By_0 - c^2 = 0,$$
$$x_1^2 + y_1^2 + 2By_1 - c^2 = 0,$$

ou, en éliminant B,

$$y_1(x_0^2 + y_0^2 - c^2) = y_0(x_1^2 + y_1^2 - c^2).$$

En remplaçant x_1 et y_1 par leurs valeurs (6), on trouve une identité.

Lorsque

$$x_0^2 + y_0^2 = c^2,$$

on a

$$x_1 = x_0, \qquad y_1 = -y_0, \qquad B = 0,$$

ce qui montre alors que le cercle passant par M, M' et les deux foyers réels a pour diamètre la distance focale, et que les points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe focal.

De même, le cercle passant par les foyers imaginaires a pour équation

$$x^2 + y^2 + 2Ax + c^2 = 0.$$

Si ce cercle peut passer par M et M', on doit avoir à la fois

$$x_0^2 + y_0^2 + 2Ax_0 + c^2 = 0,$$
$$x_1^2 + y_1^2 + 2Ax_1 + c^2 = 0;$$

ou, en éliminant A,

$$x_1(x_0^2 + y_0^2 + c^2) = x_0(x_1^2 + y_1^2 + c^2).$$

En tenant compte des valeurs (6), on voit que cette relation est une identité, ce qui démontre bien que les deux foyers imaginaires, M et M', sont sur un même cercle.

II. Lorsque le point M est fixe et les ellipses (E) homofocales, c^2 est constant.

Par suite, le point M′ est aussi fixe. Les valeurs (6) de x_1 et y_1 sont donc des quantités constantes.

Lieux des points I. — Le point I étant à l'intersection des polaires de M et M′ par rapport aux ellipses homofocales, pour avoir le lieu de ce point I, il suffit d'éliminer a^2 et b^2 entre les trois équations

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0,$$

$$a^2 - b^2 = c^2.$$

Les deux premières équations donnent $\frac{1}{a^2}$ et $\frac{1}{b^2}$ et, par suite, a^2 et b^2, valeurs que l'on porte dans la troisième. On obtient ainsi pour l'équation du lieu

$$(7) \qquad \frac{x}{y_1 - y_0} + \frac{y}{x_1 - x_0} + \frac{c^2}{x_1 y_0 - y_1 x_0} = 0.$$

C'est une droite perpendiculaire à la droite MM′, et passant par le milieu de MM′.

Lieu des points I′ *et* I″. — Les points I′ et I″ peuvent être considérés comme les centres des deux couples de droites passant par P, Q, P′, Q′, autres que le couple PQ, P′Q′.

En formant l'équation en λ qui exprime que la conique (1) est un couple de droites, on trouve une équation du troisième degré en λ avec un terme indépendant de λ qui s'annule en tenant compte des valeurs (6). Il était d'ailleurs à prévoir que l'on trouverait la valeur $\lambda = 0$, puisque, pour cette valeur, la conique (1) se réduit aux deux droites PQ, P′Q′.

Les valeurs de λ, correspondant aux deux couples PQ′,

P′Q et PP′, QQ′, sont donc données par l'équation

$$(8)\quad \begin{cases} 4a^2b^2\lambda^2 + 4\lambda(b^2x_1x_0 + a^2y_1y_0 - a^2b^2) \\ \quad + 4x_1x_0y_1y_0 + b^2(x_1 - x_0)^2 + a^2(y_1 - y_0)^2 = 0. \end{cases}$$

Les coordonnées x et y du centre des coniques (1) sont

$$(9)\qquad 2x(\lambda a^2 + x_1x_0) = (x_1 + x_0)a^2,$$

$$(10)\qquad 2y(\lambda b^2 + y_1y_0) = (y_1 + y_0)b^2.$$

Si donc on tirait de (8) les deux valeurs de λ et si on les portait dans (9) et (10), on aurait les coordonnées des points I′ et I″. Comme ces valeurs de x et y contiendraient un radical fonction de a^2 et b^2, il en résulte que les deux points I′ et I″ font partie de la même courbe dont on obtiendra l'équation en éliminant a^2, b^2 et λ entre (8), (9) et (10), et

$$(11)\qquad a^2 - b^2 = c^2.$$

L'élimination de λ entre (9) et (10) donne

$$(12)\qquad \frac{2x_1x_0}{a^2} - \frac{2y_1y_0}{b^2} = \frac{x_1 + x_0}{x} - \frac{y_1 + y_0}{y}.$$

Remarquons maintenant qu'en multipliant (9) et (10) membre à membre, on a

$$4xy[\lambda^2a^2b^2 + \lambda(b^2x_1x_0 + a^2y_1y_0) + x_1x_0y_1y_0] \\ = (x_1 + x_0)(y_1 + y_0)a^2b^2.$$

En tenant compte de cette relation, l'équation (8) s'écrit

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{(x_1 + x_0)(y_1 + y_0)a^2b^2}{xy} \\ \quad - 4\lambda a^2b^2 + b^2(x_1 - x_0)^2 + a^2(y_1 - y_0)^2 = 0. \end{cases}$$

Mais, de (9) et (10), on tire

$$2\lambda a^2b^2 = \frac{a^2b^2(x_1 + x_0) - 2b^2xx_1x_0}{x},$$

$$2\lambda a^2b^2 = \frac{a^2b^2(y_1 + y_0) - 2a^2yy_1y_0}{y}$$

et, en ajoutant,

$$4\lambda a^2 b^2 = a^2 b^2 \left(\frac{x_1+x_0}{x} + \frac{y_1+y_0}{y}\right) - 2a^2 y_1 y_0 - 2b^2 x_1 x_0.$$

Portant cette valeur de λ dans (13), il vient

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x_1^2+x_0^2}{a^2} + \frac{y_1^2+y_0^2}{b^2} \\ &= \frac{x_1+x_0}{x} + \frac{y_1+y_0}{y} - \frac{(x_1+x_0)(y_1+y_0)}{xy}. \end{aligned}\right.$$

On est donc ramené à éliminer a^2 et b^2 entre (11), (12) et (14).

De (12) et (14) on tirera $\frac{1}{a^2}$ et $\frac{1}{b^2}$, d'où l'on déduira a^2 et b^2 et, en portant ces valeurs dans (11), on aura l'équation du lieu des points I′ et I″.

En procédant ainsi, on trouve

$$\begin{aligned} &2xy\left[\frac{x(x_1+x_0)}{x_1 x_0} + \frac{y(y_1+y_0)}{y_1 y_0} - 2\right] \\ &\quad\times \frac{[x_1 x_0(y_1^2+y_0^2)+y_1 y_0(x_1^2+x_0^2)]}{(x_1+x_0)(y_1+y_0)} \\ &= \left[x(x_1+x_0) - \frac{y x_0^2}{y_0^2}(y_1+y_0) - 2x_1 x_0\right] \\ &\quad\times\left[y(y_1+y_0) - \frac{x y_0^2}{x_0^2}(x_1+x_0) - 2y_1 y_0\right]. \end{aligned}$$

Le lieu est une cubique de la forme

$$xy(Px+Qy+R) = (Mx+Ny+S)(M'x+N'y+S') = 0,$$

qu'il est facile de construire.

Nous allons maintenant démontrer la propriété suivante :

La droite I′I″ *passe par le milieu de* MM′.

Si λ' et λ'' sont les deux racines de l'équation (8) et si $x'y'$, $x''y''$ sont les coordonnées des points I′ et I″,

nous aurons, d'après (9) et (10),

$$(15)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{(x_1 + x_0)a^2}{2(\lambda' a^2 + x_1 x_0)}, & y' = \dfrac{2(\lambda' b^2 + y_1 y_0)}{(y_1 + y_0) b^2}, \\ x'' = \dfrac{(x_1 + x_0)a^2}{2(\lambda'' a^2 + x_1 x_0)}, & y'' = \dfrac{(y_1 + y_0) b^2}{2(\lambda'' b^2 + y_1 y_0)}. \end{cases}$$

La droite I'I'' a pour équation

$$Y - y' = (X - x')\left(\frac{y' - y''}{x' - x''}\right),$$

ou bien

$$Y - y'' = (X - x'')\left(\frac{y' - y''}{x' - x''}\right),$$

ou encore, en ajoutant, pour plus de symétrie,

$$(x' - x'')[2Y - (y' + y'')] = (y' - y'')[2X - (x' + x'')].$$

Pour que la droite I'I'' passe par le milieu de MM', il faut que l'on ait

$$2X = x_1 + x_0, \qquad 2Y = y_1 + y_0,$$

c'est-à-dire

$$(x' - x'')[(y_1 + y_0) - (y' + y'')] \\ = (y' - y'')[(x_1 + x_0) - (x' + x'')].$$

En y portant les valeurs (15), cette équation ne contient plus que les valeurs λ' et λ'', et elle se réduit à

$$(\lambda' + \lambda'')a^2 b^2 + (a^2 y_1 y_0 + b^2 x_1 x_0 - a^2 b^2) = 0,$$

ce qui est une identité d'après l'équation (8). La propriété est donc démontrée.

Cette propriété va nous être utile pour montrer que tout cercle passant par I'I'' est orthogonal au cercle décrit sur MM' comme diamètre.

Nous allons d'abord démontrer que le cercle décrit sur II' comme diamètre est orthogonal au cercle décrit sur MM' comme diamètre.

A cet effet, désignons par ξ, η les coordonnées du milieu de MM′ et par μ et ν celles du milieu de II′. On a

$$\xi = \frac{x_0 + x_1}{2}, \qquad \eta = \frac{y_1 + y_0}{2},$$
$$\mu = \frac{x' + x''}{2}, \qquad \nu = \frac{y' + y''}{2}.$$

Si R désigne le rayon du cercle MM′, ρ celui du cercle II′, et D la distance des centres de ces deux cercles, on a

$$4R^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2,$$
$$4\rho^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2,$$
$$D^2 = (\xi - \mu)^2 + (\eta - \nu)^2.$$

Si les deux cercles sont orthogonaux, on doit avoir

$$R^2 + \rho^2 = D^2,$$

c'est-à-dire

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2$$
$$= [(x_0 + x_1) - (x' + x'')]^2 + [(y_0 + y_1) - (y' + y'')]^2$$

ou

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} &2x_1x_0 + 2y_1y_0 + 2x'x'' + 2y'y'' \\ &\quad = (x_0 + x_1)(x' + x'') + (y_0 + y_1)(y' + y''). \end{aligned} \right.$$

On pourrait, comme pour la démonstration précédente, substituer les valeurs (15) dans cette relation qui serait alors fonction de $\lambda'\lambda''$ et $(\lambda' + \lambda'')$. En tenant compte de (8), on verrait que cette relation est une identité.

Le calcul ainsi conduit serait un peu long. Il est préférable de se servir des valeurs directes de x', x'', y', y''. L'équation qui donne x' et x'' s'obtient en éliminant λ entre (8) et (9), élimination fort simple, qui conduit à

$$x^2(b^2x_0^2 + a^2y_0^2)$$
$$+ \frac{2xx_0^2(a^2yy_0 - b^2x_1x_0 - a^2b^2)}{x_1 + x_0} + a^2b^2x_0^2 = 0;$$

d'où l'on déduit

$$x' + x'' = -\frac{2x_0^2(a^2y_1y_0 - b^2x_1x_0 - a^2b^2)}{(x_1 + x_0)(b^2x_0^2 + a^2y_0^2)},$$

$$x'x'' = \frac{a^2b^2x_0^2}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}.$$

On trouverait de même en formant l'équation en y,

$$y' + y'' = -\frac{2y_0^2(b^2x_1x_0 - a^2y_1y_0 - a^2b^2)}{(y_1 + y_0)(b^2x_0^2 + a^2y_0^2)},$$

$$y'y'' = +\frac{a^2b^2y_0^2}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}.$$

En portant ces valeurs dans (16) et tenant compte des valeurs (6), on trouve que (16) est une identité.

Le cercle décrit sur MM' comme diamètre est donc orthogonal à celui de diamètre I'I''. Il est facile de voir qu'il en est de même pour un cercle quelconque passant par I'I''.

En effet, soient C le milieu de I'I'' et C' le milieu de MM'. Nous avons vu que I'I'' passe par le point C' et que

$$R^2 + \rho^2 = D^2.$$

Considérons maintenant un cercle quelconque passant par I', I'', de centre C'', et ayant en K un des points de rencontre avec le cercle C'MM'. Nous avons alors

$$\overline{C'C''}^2 = \overline{CC''}^2 + D^2.$$

Or

$$\overline{CC''}^2 = \overline{C''I'}^2 - \rho^2 = \overline{C''K}^2 - \rho^2,$$

$$D^2 = R^2 + \rho^2 = \overline{C'K}^2 + \rho^2.$$

En ajoutant, on a

$$\overline{C'C''}^2 = \overline{C''K}^2 + \overline{CK}^2,$$

ce qui prouve bien que les cercles C'MM' et C''I'I'' sont orthogonaux.

SUR LES CERCLES QUI TOUCHENT TROIS CERCLES DONNÉS OU QUI LES COUPENT SOUS UN ANGLE DONNÉ (1);

PAR M. MAURICE FOUCHÉ,
Agrégé de l'Université.

APPLICATION AUX CONIQUES.

On sait que la transformation par pôles et polaires réciproques transforme tous les cercles du plan en coniques ayant pour foyer commun le centre du cercle directeur, et, réciproquement, les coniques admettant ce point pour foyer se transforment en des cercles. Les points d'intersection de deux cercles deviennent les tangentes communes aux deux coniques correspondantes, lesquelles se réduisent à deux, puisque les deux coniques ont déjà en commun les tangentes imaginaires issues du foyer.

Les tangentes AT et AT' aux deux cercles en leur point d'intersection deviennent les points de contact de la tangente commune aux deux coniques, et l'angle de ces tangentes, c'est-à-dire l'angle des deux cercles, est égal à l'angle des droites qui joignent le foyer commun aux points de contact de la tangente commune, ce qui donne déjà le théorème connu :

Les deux tangentes communes à deux coniques confocales limitées à leurs points de contact sont vues du foyer commun sous un même angle.

J'appellerai cet angle *angle focal* des deux coniques. Deux cercles tangents se transforment en deux coniques

(1) Voir même Tome, p. 227 et 331.

tangentes. L'axe radical de deux cercles devient le point de rencontre des tangentes communes de deux coniques.

Un faisceau de cercles se transforme en une famille de coniques confocales enveloppant deux droites. Une famille de cercles enveloppant deux cercles fixes devient une famille de coniques confocales enveloppant deux coniques confocales fixes. Un centre radical commun à plusieurs cercles équivaut à un cercle orthogonal : il devient une conique fixe qui a avec toutes les autres un angle focal droit. Un centre de similitude étant l'intersection de deux tangentes communes devient la corde commune de deux coniques. Un axe de similitude devient le point d'intersection de trois cordes communes nécessairement concourantes. Il est alors facile de transformer la théorie précédente. On trouve en particulier les théorèmes suivants :

1° *Si l'on considère trois coniques confocales, toutes les coniques confocales qui ont avec elles un même angle focal se répartissent en quatre familles dont chacune est composée de coniques tangentes à deux droites fixes qui passent par le point de concours de trois cordes communes des coniques données.*

2° *Étant données deux coniques confocales, toutes les coniques confocales qui ont avec chacune d'elles des angles focaux invariables se répartissent en deux familles dont chacune est composée de coniques confocales enveloppant deux coniques fixes, ayant avec une autre conique fixe un angle focal droit et telles que l'une des cordes communes de deux quelconques d'entre elles passe par le point de rencontre des tangentes communes aux deux coniques données.*

On pourra aussi résoudre les deux problèmes suivants :

1° Étant données trois coniques confocales, en trouver une autre qui soit tangente à ces trois-là.

2° Étant données trois coniques confocales, en trouver une autre qui ait avec ces trois-là des angles focaux déterminés.

Les deux problèmes admettent chacun huit solutions réelles ou imaginaires.

Les coniques confocales sont celles qui sont tangentes à deux droites fixes imaginaires menées par le foyer commun. Une seconde transformation par pôles et polaires réciproques par rapport à une conique quelconque qui peut être imaginaire les transforme en coniques passant par deux points fixes, et une nouvelle transformation donne les coniques tangentes à deux droites fixes. On peut étendre à ces coniques ceux des résultats précédents qui ne concernent pas les angles. Donc :

Si parmi toutes les coniques tangentes à deux droites fixes on considère celles qui sont tangentes à deux coniques fixes tangentes aux mêmes droites, elles se répartissent en deux familles telles que l'une des cordes communes de deux coniques de la même famille passe par le point de rencontre des deux tangentes fixes.

Si parmi toutes les coniques qui passent par deux points fixes on considère toutes celles qui sont tangentes à deux coniques fixes passant par les mêmes points, elles se répartissent en deux feuilles telles que deux des tangentes communes à deux coniques de la même famille se coupent sur la droite qui joint les deux points fixes.

EXTENSION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE AUX CERCLES TRACÉS SUR LA SPHÈRE.

L'inversion transforme une famille de cercles tracés sur le plan en une famille de cercles tracés sur la sphère. Si les cercles ont un centre radical commun C', les cercles transformés seront dans des plans passant en un point

fixe D'. On le reconnaît en considérant la sphère qui passe par le pôle d'inversion P et le cercle considéré O', et qui, par la transformation, devient le plan du cercle transformé. Le rayon d'inversion PC' coupe cette sphère en un second point D' tel que $C'D' \times C'P$ est égal à la puissance de C' par rapport au cercle O'. Donc le point D' reste invariable quand le cercle O' varie, et par suite le plan de O passe par le point fixe D, transformé de D'. Si Ω est le centre de la sphère, la droite ΩD coupe la sphère en un point C, qui sera appelé le centre radical commun de tous les cercles O. Réciproquement, tout cercle dont le plan passe par D est le transformé d'un cercle du plan ayant avec les autres le point C' pour centre radical.

Un faisceau de cercles se transforme en une famille de cercles dont les plans passent par une droite fixe, car chaque point de l'axe radical donne comme le point C', un point D par où passe le plan du cercle. Ce plan variable passe donc par une infinité de points qui ne peuvent être qu'en ligne droite. Le plan déterminé par cette droite et le centre de la sphère coupe la sphère suivant un grand cercle qui est *l'axe radical des cercles* O et qui est perpendiculaire au grand cercle lieu de leurs centres. On appelle encore faisceau ces familles de cercles.

En transformant les théorèmes II et III, on trouve :

Théorème XII. — *Les cercles isogonaux à deux cercles de la sphère se répartissent en deux groupes dont chacun est formé des cercles dont les plans passent par un point fixe.*

Parmi tous les cercles isogonaux se trouvent des grands cercles : ce sont ceux qu'on obtient en faisant tourner un plan autour de la droite ΩD qui joint le

centre au point fixe. Il en résulte que *tous les grands cercles isogonaux à deux cercles donnés se répartissent en deux faisceaux*.

Parmi tous les grands cercles isogonaux figurent les cercles tangents si ceux-ci sont réels. Donc les sommets des faisceaux sont les centres de similitude des deux cercles donnés. Ce sont aussi, d'après le théorème actuel, les centres radicaux des cercles isogonaux. Il y en a en tout quatre, deux symétriques pour chaque groupe de cercles isogonaux. Cette remarque complète l'analogie avec les théorèmes I et II.

Le théorème IV devient, en tenant compte de la remarque précédente :

THÉORÈME XIII. — *Les cercles isogonaux à trois cercles donnés se répartissent en quatre faisceaux, dont chacun admet pour axe radical l'un des quatre axes de similitude des trois cercles donnés.*

Le lieu des pôles des cercles isogonaux d'un même faisceau est le grand cercle perpendiculaire à l'axe de similitude mené par le centre radical des trois cercles donnés, parce que parmi tous les cercles isogonaux figure le cercle orthogonal aux trois cercles donnés.

Le théorème V subsiste également parce qu'il exprime que le point H est le centre radical commun à tous les cercles isogonaux et au cercle donné O. On le démontre directement en remarquant que le point H est sur le rayon de la sphère qui passe par l'intersection de l'axe du faisceau avec le plan du cercle O. Il résulte de là que :

La construction indiquée pour tracer un cercle tangent à trois cercles donnés s'applique aux cercles tracés sur la sphère. Il y a encore huit solutions réelles ou imaginaires.

Les conclusions de la discussion subsistent en entier.

On le reconnaît facilement par l'inversion en s'appuyant sur les remarques suivantes :

1° Deux cercles de la sphère qui se coupent se transforment en deux cercles du plan qui se coupent également.

2° Deux cercles de la sphère extérieurs ou intérieurs se transforment respectivement en deux cercles du plan extérieurs ou intérieurs si l'on prend pour pôle d'inversion un point de la surface de la sphère extérieure à la fois aux deux cercles, d'où il suit qu'en choisissant le pôle d'inversion sur la sphère extérieur à la fois aux trois cercles donnés ceux-ci conserveront dans le plan la disposition qu'ils avaient sur la sphère.

Le théorème VIII donne le résultat suivant :

Théorème XIV. — *Les cercles de la sphère qui coupent deux cercles fixes sous des angles constants sont les cercles de deux familles telles que tous les cercles d'une même famille touchent deux cercles fixes et ont un centre radical commun,* ou bien, *et dont les plans passent par un point fixe.*

On en déduit immédiatement, en supposant les angles nuls :

Tous les cercles de la sphère tangents à deux cercles fixes constituent deux familles dont chacune est composée de cercles dont les plans passent par un point fixe, ce qui du reste est une conséquence du théorème XII.

La propriété relative à l'existence simultanée d'un faisceau et d'une famille de cercles tels que tous les cercles du faisceau coupent sous un même angle chaque cercle de la famille s'applique également à la sphère. Parmi les cercles du faisceau il y a nécessairement un grand cercle et un seul; celui-ci ne peut être isogonal à

deux cercles de la famille que s'il passe par leur centre de similitude. Donc :

Théorème XV. — *Tous les cercles de la famille considérée ont un axe de similitude commun, ce qui complète l'analogie des théorèmes VIII, IX, X.*

Enfin l'analogie se poursuit de la même manière pour la résolution des problèmes, sauf pour les problèmes III et VIII, pour lesquels la construction indiquée ne s'applique pas à la sphère; mais on pourra les résoudre en transformant par inversion la sphère en un plan. Pour le problème VIII, on pourra aussi employer la construction très simple indiquée par M. Tarry qui s'applique à la sphère. Dans tous les cas, et pour tous les problèmes, le nombre des solutions reste le même.

EXTENSION AUX SPHÈRES.

Cette extension est tellement facile, au moins en partie, qu'il suffira d'énoncer les théorèmes avec une courte indication de la démonstration lorsque cela sera nécessaire.

Théorème XVI. — *Toute sphère qui passe par deux points antihomologues à deux sphères est isogonale à ces deux-là.*

Théorème XVII. — *Toute sphère isogonale à deux autres les coupe suivant deux cercles antihomologues.*

Théorème XVIII. — *Toutes les sphères isogonales à deux sphères fixes se répartissent en deux groupes dont chacun est constitué par les sphères telles que par rapport à chacune d'elles la puissance d'un des centres de similitude des sphères donnés est égale au module d'inversion des deux sphères données par rapport à ce centre.*

Pour ces deux théorèmes il suffit de considérer le plan

qui passe par les centres des deux sphères fixes et d'une sphère mobile.

Les sphères orthogonales aux deux sphères fixes appartiennent aux deux groupes.

Théorème XIX. — *Les sphères isogonales à trois sphères fixes se répartissent en quatre familles dont chacune est constituée par les sphères admettant pour axe radical l'un des axes de similitude des trois sphères données.*

Chacune de ces quatre familles se compose de sphères passant par deux points fixes de l'axe de similitude. Le lieu de leurs centres est le plan perpendiculaire à l'axe de similitude considéré mené par l'axe radical des trois sphères données.

Théorème XX. — *Les plans des cercles d'intersection de toutes les sphères isogonales à trois sphères données et appartenant à une même famille avec l'une des sphères données coupent l'axe de similitude correspondant en un point fixe.*

Parmi les sphères isogonales figurent les sphères ω tangentes aux trois sphères données O, O′, O″. Le plan du cercle d'intersection de ω et O devient alors le plan tangent au point de contact T de ω avec O. Il doit couper l'axe de similitude en un point fixe H; donc, quand ω varie, il enveloppe le cône circonscrit du sommet H à la sphère O et le lieu du point C de contact T est un cercle. On obtient ainsi le théorème de Dupuis :

Théorème XXI. — *Le lieu des points de contact des sphères tangentes à trois sphères fixes avec l'une de ces sphères se compose de quatre cercles.*

Il y a en effet un cercle pour chaque famille.

Théorème XXII. — *Les sphères isogonales à quatre*

sphères fixes constituent huit faisceaux dont chacun admet pour plan radical l'un des plans de similitude des quatre sphères fixes.

Démonstration analogue à celle du théorème IV.

Le lieu des centres de chaque faisceau est la perpendiculaire abaissée du centre radical des quatre sphères fixes sur le plan de similitude considéré.

Remarque. — Le théorème tombe en défaut si les quatre sphères données ont un axe de similitude commun. Soit alors M un point de la sphère O. Puisque les centres de similitude de O avec O′O″O‴ sont en ligne droite, les quatre points antihomologues deux à deux M, M′, M″, M‴ seront dans un même plan passant par l'axe de similitude. En général, par ces quatre points on ne pourra faire passer aucune sphère, et les sphères isogonales aux quatre sphères données se réduiront alors aux plans passant par l'axe de similitude. Mais si les quatre points M, M′, M″, M‴ sont sur une même circonférence, toute sphère passant par cette circonférence sera isogonale, et plus généralement toutes les sphères qui auront avec celle-là pour axe radical l'axe de similitude seront isogonales aux quatre sphères données. Alors l'un des quatre faisceaux de sphères isogonales est remplacé par une famille plus générale de sphères ayant un axe radical commun, comme s'il n'y avait que trois sphères données. Cela tient à ce que toute sphère isogonale à trois des sphères données et appartenant à la famille considérée coupe la quatrième sous le même angle que les trois premières.

Parmi toutes les sphères isogonales figurent une infinité de sphères tangentes aux quatre sphères données, dont les points de contact sur la sphère O sont sur un certain cercle φ. Si par l'axe de similitude on fait passer un plan quelconque qui coupe φ en A, il y aura une

sphère tangente passant par A, et les quatre cercles d'intersection du plan avec les quatre sphères seront tangents au cercle d'intersection du plan avec la sphère tangente. On peut alors énoncer les théorèmes suivants :

Théorème XXIII. — *Étant données quatre sphères ayant leurs centres de similitude en ligne droite, on prend sur ces sphères quatre points* M, M′, M″, M‴, *tels que trois d'entre eux soient antihomologues du quatrième relativement aux centres de similitude qui sont en ligne droite. S'il arrive que le quadrilatère* MM′M″M‴ *soit inscriptible, il en sera de même de tous les quadrilatères analogues qu'on pourra former de la même manière.*

Théorème XXIV. — *Si quatre sphères ayant leurs centres de similitude en ligne droite sont coupées par un plan passant par l'axe de similitude suivant quatre cercles tangents à un même cercle, tout plan passant par l'axe de similitude les coupera aussi suivant quatre cercles tangents à un même cercle.*

Ce cas particulier est celui où les quatre sphères font partie d'une famille qui sera étudiée plus loin.

Théorème XXV. — *Les plans des cercles d'intersection de toutes les sphères d'un même faisceau isogonales à quatre sphères fixes avec l'une de ces sphères coupent le plan de similitude correspondant suivant une droite fixe.*

En effet, soit (H) la droite d'intersection du plan de similitude avec le plan du cercle d'intersection d'une des sphères isogonales ω et d'une des sphères données O. Quand ω varie, tous les points de (H) conservent la même puissance par rapport à ω et à O.

De là résulte *la construction d'une sphère tangente*

à quatre sphères données absolument analogue à celle qui résout le problème plan correspondant.

Après avoir choisi trois centres de similitude de la sphère donnée O avec les sphères O′, O″, O‴, on prend arbitrairement sur O un point quelconque M, et l'on cherche l'antihomologue de M sur chacune des trois autres sphères données. La sphère qui passe par les quatre points ainsi déterminés coupe la sphère O suivant un cercle dont le plan coupe suivant une droite (H) le plan des trois centres de similitude considérés. De (H) on mène à la sphère O un plan tangent qui la touche en A et l'on construit les antihomologues de A sur les trois autres sphères. La sphère qui passe par ces quatre points répond à la question.

Le problème admet seize solutions.

La discussion faite pour le problème plan ne s'applique pas au problème actuel. Du reste, il n'est pas vrai que les seize solutions du problème soient toutes réelles toutes les fois que les quatre sphères données sont deux à deux extérieures. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer trois sphères égales extérieures deux à deux et les sphères qui leur sont tangentes avec des contacts de même espèce et qui correspondent ainsi à l'axe de similitude rejeté à l'infini. Toutes ces sphères tangentes ont leurs centres en ligne droite sur l'axe radical des trois sphères données, comme on le reconnaît aisément par la considération des points antihomologues, et elles enveloppent le tore enveloppé par l'une des sphères données, qu'on ferait tourner autour de cet axe radical. Dès lors si la quatrième sphère donnée est à l'intérieur de ce tore, le problème est manifestement impossible. Cette simple remarque suffit à montrer quelle serait la complication de la discussion complète. Dans le cas général, le tore est remplacé par une autre surface du quatrième ordre dont il sera parlé plus loin.

Si les quatre sphères ont un axe de similitude commun, cet axe contient six centres de similitude, et le plan de similitude correspondant est indéterminé. Dans ce cas, les deux sphères correspondant à cet axe se réduisent, en général, aux deux plans tangents communs; mais si les sphères se trouvent dans le cas particulier signalé dans la remarque du théorème XII, le problème est indéterminé.

Les problèmes relatifs aux sphères isogonales se résolvent comme les problèmes plans correspondants. En particulier, la recherche d'une sphère isogonale à cinq sphères données se ramène à l'intersection d'une droite et d'un plan. Il y a seize solutions réelles ou imaginaires. On déduit de ce problème un théorème relatif à des droites ou à des plans concourants dont il serait facile de reconstituer l'énoncé.

Le problème qui consiste à trouver une sphère coupant quatre sphères données sous un même angle donné revient à trouver une sphère d'un faisceau coupant une sphère donnée sous un angle donné. Il se ramène au problème plan correspondant par la considération du plan qui passe par le lieu des centres du faisceau et le centre de la sphère donnée.

Théorème XXVI. — *Toutes les sphères qui coupent deux sphères fixes sous des angles invariables se répartissent en deux familles ayant un centre radical commun situé sur la ligne des centres des deux sphères et un plan de similitude commun, qui est le plan radical des deux sphères fixes.*

Les sphères d'une même famille admettent pour sphères isogonales toutes les sphères du faisceau défini par les deux sphères données, parmi lesquelles figurent des sphères tangentes réelles ou imaginaires, de sorte

que chaque famille considérée est une famille de sphères tangentes à deux sphères fixes.

Théorème XXVII. — *Toutes les sphères qui coupent trois sphères fixes sous des angles invariables se répartissent en quatre familles telles que toutes les sphères d'une même famille ont un axe de similitude commun qui est l'axe radical des trois sphères fixes, et un axe radical commun.*

En effet, on reconnaît d'abord, comme dans le théorème VIII, que, si O est l'une des sphères de l'énoncé, toutes les sphères transformées de O par inversion avec un pôle pris sur l'axe radical (D) des trois sphères données ω, ω', ω'', et un module égal à la puissance commune de ce pôle par rapport à ces trois sphères, ω, ω', ω'', formeront une famille répondant à l'énoncé.

Si O, O′, O″, O‴ sont quatre sphères de l'énoncé, ω, ω', ω'' peuvent leur être isogonales par rapport à trois plans de similitude différents dont l'intersection ne serait pas un centre de similitude de deux des quatre sphères données. Alors chacune de ces quatre sphères sera le point de départ d'une famille définie comme plus haut.

Enfin, d'après le théorème précédent, il existe sur chacune des droites de centre $\omega\omega'$, $\omega\omega''$, $\omega''\omega'''$ un point C qui a la même puissance par rapport à toutes les sphères d'une même famille. Ces trois points sont donc en ligne droite et définissent un axe radical (E) commun à toutes ces sphères.

Pour montrer que toute autre sphère de l'énoncé fait partie d'une de ces quatre familles, je considère cinq sphères *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, répondant aux conditions de l'énoncé. ω, ω', ω'' leur seront isogonales relativement à certains centres de similitude. Si l'on considère quatre

sphères a, b, c, d, les centres de similitude par rapport auxquels l'une des sphères ω, ω', ω'' leur est isogonale seront dans un même plan de similitude, de sorte qu'ils pourront être définis par le sens des rayons de ces quatre sphères. De même, dans le groupe *abce*, les centres de similitude seront définis par le sens des rayons, les sens des trois premières sphères restant les mêmes, puisque leurs centres de similitude n'ont pas changé. Il ne reste plus à définir que le centre de similitude de groupe *de*. Or, si l'on considère le groupe *cde*, le centre cherché doit être en ligne droite avec ceux de *cd* et de *ce* qui sont définis par le sens des rayons. Donc le sens de *de* est bien celui qui est défini par le sens des rayons de d et de e. Cela posé, je représenterai par a, b, c, d, e les sphères prises dans des sens quelconques, et a', b', c', d', e' les sphères prises dans les sens inverses.

Comme on peut changer à la fois les sens de toutes les sphères, on peut toujours en représenter trois par des lettres non accentuées, de sorte qu'on obtiendra toutes les combinaisons en accentuant 0, 1 ou 2 des cinq lettres, de toutes les manières possibles. Il faut faire trois de ces combinaisons pour obtenir les trois combinaisons des centres de similitude correspondant aux trois sphères données ω, ω', ω''.

S'il y a deux lettres α, β ayant le même accent dans chacune des trois combinaisons, le centre de similitude des sphères $\alpha\beta$ ou $\alpha'\beta'$ fera partie des trois combinaisons; de même, s'il y a deux lettres ayant des accents contraires dans chacune des trois combinaisons, le centre de similitude des deux sphères $\alpha\beta'$ ou $\alpha'\beta$ fera partie des trois combinaisons. Soit alors *abcde* le sens des sphères dans la première combinaison. Si, dans une des deux autres combinaisons, on n'accentue qu'une lettre au plus, ou si, dans les deux combinaisons, il y a une

lettre accentuée commune, il y aura au plus trois lettres accentuées et les deux autres resteront sans accent dans chaque combinaison. Si, au contraire, on accentue dans chaque combinaison deux lettres différentes, par exemple *bc* et *de*, on aura le tableau

$$\begin{matrix} a & b & c & d & e \\ a & b & c & d' & e' \\ a & b' & c' & d & e \end{matrix}$$

dans lequel les lettres *bc* figurent accentuées de même manière sur chaque ligne.

De toute manière il y a au moins deux sphères auxquelles les trois sphères données sont isogonales relativement au même centre de similitude, et celles-là font partie d'une même famille, car elles s'échangent par l'inversion faite du centre de similitude commun comme pôle.

Toutes les sphères des quatre familles admettent pour sphères isogonales toutes les sphères qui ont avec ω, ω', ω'' le même axe radical. Parmi celles-ci se trouvent les sphères isogonales coupant les sphères de la famille sous un angle nul donné.

Toutes les sphères d'une même famille sont donc tangentes à une infinité de sphères, ayant un axe radical commun.

Il en résulte que ces sphères tangentes et les sphères O forment deux familles de sphères conjuguées, telles que toutes les sphères de la première famille sont tangentes à toutes les sphères de la seconde. Ces deux familles admettent ainsi pour enveloppe une même surface qui est le lieu de leurs points de contact. D'après le théorème de Dupuis, la caractéristique de la sphère variable de chaque famille est donc un cercle. Or la caractéristique d'une sphère variable est une ligne de courbure

de la surface enveloppe. Toutes les sphères d'une même famille ont leurs centres dans un même plan passant par l'axe radical des sphères de l'autre famille, puisque cet axe est leur axe de similitude commun. Parmi celles de l'autre famille il y en a deux qui ont leur centre dans ce plan-là : ce sont celles qui ont pour grand cercle l'un des cercles φ, φ_1, tangent aux trois grands cercles des trois sphères de la première famille situés dans le plan des centres, ce cercle tangent correspondant à l'axe de similitude qui reste invariable pour la première famille. Dès lors, tous les grands cercles des sphères de la première famille sont tangents à ces deux cercles φ et φ_1, et le lieu de leurs centres est une conique, ayant pour foyers les centres de φ et φ_1. D'un autre côté, le lieu des centres des sphères de la seconde famille est aussi une conique située dans un plan perpendiculaire au premier, et cette conique comprenant les centres de φ et φ_1 passe par les foyers de la première.

Enfin on remarquera que des sphères ayant un axe de similitude commun ont deux plans tangents communs, et des sphères ayant un axe radical commun passent par deux points fixes. Nos deux familles conjuguées sont donc des familles de sphères passant par deux points fixes, et admettant deux plans tangents communs.

De plus, les plans tangents communs peuvent être considérés comme des sphères, on peut leur appliquer le théorème de Dupuis, et le lieu des points de contact est un cercle. Si même on se reporte à la démonstration du théorème de Dupuis (Th. XX) et qu'on suppose que la sphère O soit remplacée par un plan, on reconnaît facilement que le centre du cercle est le point d'intersection de l'axe radical avec le plan tangent commun.

D'autre part, parmi toutes les sphères isogonales aux sphères O, lesquelles sont les sphères ayant avec ω,

ω', ω'' le même axe radical, figurent non seulement les deux plans tangents, mais encore tous les plans passant par la même droite, et, en particulier, ceux qui passent aussi par l'un des points communs à toutes les sphères O. Donc, en leurs points communs, les sphères O sont également inclinées sur ces mêmes plans, c'est-à-dire que leurs plans tangents enveloppent un cône de révolution.

On peut alors énoncer les théorèmes suivants :

Théorème XXVIII. — *Si une sphère varie en restant tangente à trois sphères fixes, elle reste aussi tangente à une infinité d'autres sphères, et, en particulier, à deux plans fixes réels ou imaginaires. De plus elle passe par deux points fixes réels ou imaginaires. Le lieu de son point de contact avec chacun des plans fixes est un cercle, et son plan tangent en chacun des deux points fixes enveloppe un cône de révolution.*

Théorème XXIX. — *Il existe une infinité de systèmes conjugués de deux familles de sphères passant par deux points fixes et tangentes à deux plans fixes, les points fixes de chaque famille étant sur la droite d'intersection des plans fixes de l'autre famille, et telles que toutes les sphères d'une famille sont tangentes à toutes les sphères de l'autre. Ces deux familles ont une enveloppe commune dont les lignes de courbure sont planes et circulaires dans les deux systèmes. Le lieu des centres de courbure principaux de cette surface enveloppe se compose de deux coniques dont chacune est la focale de l'autre.*

Cette surface admet deux points coniques où les cônes tangents sont de révolution, et deux plans circonscrits qui les touchent suivant un cercle. Elle se reproduit par inversion faite au moyen d'un pôle pris d'une manière

quelconque sur l'une des deux droites fixes qui joignent les points fixes et par où passent les plans tangents fixes.

On lui a donné le nom de *cyclide*. Le tore en est un cas particulier.

Théorème XXX. — *Si l'on considère deux familles conjuguées de sphères tangentes, le cercle lieu des points de contact d'une d'entre elles avec les sphères de l'autre famille rencontre à angle droit les cercles analogues tracés sur les sphères de l'autre famille.*

La démonstration du théorème XVII tombe en défaut dans deux cas particuliers :

1° Si les trois sphères données ont leurs centres en ligne droite, on ne peut plus conclure à l'existence d'un axe radical commun. On ramène ce cas au cas général par une inversion. Alors on retrouve bien les deux familles de sphères tangentes. On reconnait aisément que l'une des familles est constituée par des sphères obtenues en faisant tourner l'une d'elles autour de la ligne des centres des sphères données et l'autre par des sphères ayant leurs centres en ligne droite avec ceux des sphères données. La surface enveloppe est un tore.

2° Si les trois sphères données ont un plan radical commun, toutes les sphères qui coupent les deux premières sous les angles α et β et qui font partie d'une même famille admettent la troisième ω'' pour sphère isogonale. L'angle d'intersection de ω'' avec ces sphères reste donc invariable. S'il n'est pas égal à γ, il n'existe aucune sphère de la famille coupant les trois sphères données sous les angles donnés. Si, au contraire, l'angle invariable est égal à γ, la famille des sphères considérées est plus générale que dans le cas général et comprend des sphères ayant un plan radical commun et un plan de similitude commun, comme s'il n'y avait que deux sphères données.

Le problème qui consiste à trouver une sphère coupant quatre sphères données sous des angles donnés se résout comme le problème plan correspondant. Il admet, en général, seize solutions réelles ou imaginaires et devient impossible ou indéterminé si les quatre sphères ont un axe radical commun, et, à plus forte raison, si les quatre sphères données ont un plan radical commun.

La transformation par pôles et polaires réciproques remplace les sphères par des quadriques de révolution ayant pour foyer le centre de la sphère directrice, et l'angle d'intersection de deux sphères par l'angle constant sous lequel on voit, du foyer commun, deux points de contact du cône circonscrit commun situés dans un même plan avec le foyer. Si l'on donne à cet angle le nom d'*angle focal* des deux quadriques, on obtiendra facilement les théorèmes transformés des théorèmes précédents et la solution des problèmes correspondants. Si deux sphères sont tangentes, les quadriques correspondantes seront tangentes aussi, et l'on obtiendra, en particulier, les résultats suivants :

1° *Si une quadrique de révolution se déforme de manière à conserver un foyer invariable et à toucher constamment trois quadriques de révolution admettant le même foyer, le lieu des points de contact sur chacune de ces trois quadriques sera une conique. De plus la quadrique variable passera par deux points fixes et restera tangente à deux plans fixes.*

2° *Il existe une infinité de systèmes de deux familles conjuguées formées de quadriques de révolution confocales telles que toutes les quadriques d'une même famille passent par deux points fixes et sont tangentes à deux plans fixes. La droite qui joint les points fixes d'une famille est la droite d'intersection des plans fixes de l'autre famille. Chaque*

quadrique d'une famille est tangente à toutes les quadriques de l'autre. Le lieu des points de contact de l'une de ces quadriques avec toutes celles de l'autre famille est une conique. Les deux familles ont une surface enveloppe commune et les caractéristiques des quadriques mobiles sont des coniques.

Des quadriques de révolution confocales sont des quadriques inscrites dans un même cône ayant le foyer commun pour sommet. Par une seconde transformation par pôles et polaires réciproques par rapport à une quadrique quelconque qui peut être imaginaire, on les transformera en quadriques passant par une conique donnée.

Donc le théorème précédent s'applique à des quadriques passant par une même conique.

Enfin, par une nouvelle transformation, on étend le théorème à des quadriques inscrites dans un cône du second ordre quelconque.

Si l'on remarque qu'une conique ou un cône circonscrit, deux points et deux plans tangents font neuf conditions, on peut énoncer les théorèmes suivants :

1° *Toutes les quadriques qui passent par une même conique ou sont inscrites dans un même cône du second degré et qui, de plus, passent par deux points fixes et sont tangentes à un plan fixe sont aussi tangentes à un deuxième plan fixe. De même, si l'on se donnait deux plans tangents et un point, toutes les quadriques passeraient par un deuxième point fixe. Le lieu des points de contact de chaque quadrique avec chaque plan fixe est une conique, et les plans tangents aux quadriques en chacun des points fixes enveloppent un cône du second ordre.*

2° *Si parmi toutes les quadriques qui passent par*

une conique donnée ou sont inscrites dans un cône du second ordre donné, on en considère trois fixes et celles qui leur sont tangentes, les quadriques variables passent par deux points fixes et sont tangentes à deux plans fixes; le lieu de leurs points de contact avec chaque plan fixe est une conique et leurs plans tangents aux deux points fixes enveloppent deux cônes de révolution.

3° *Il existe une infinité de systèmes de deux familles conjuguées de quadriques passant toutes par une même conique ou inscrites dans un même cône de révolution et jouissant de toutes les propriétés déjà signalées.*

SUR LA COURBURE DANS LES SECTIONS CONIQUES;

Par M. Cl. SERVAIS,
Professeur à l'Université de Gand.

1. Soient M un point d'une conique, T_a et T_b, N_a et N_b les points d'intersection de la tangente et de la normale en ce point, avec les axes de la courbe, μ le centre de courbure au point M. D'un point R de la droite T_aT_b, abaissons une perpendiculaire sur la polaire de ce point, rencontrant la normale N_aN_b au point R_1. La perpendiculaire RR_1 enveloppe une parabole (P), inscrite dans le quadrilatère formé par la tangente T_aT_b, la normale N_aN_b, et les deux axes de la conique considérée; le point μ est le point de contact de la droite N_aN_b avec cette parabole. On déterminera donc le point μ à l'aide du théorème de Brianchon. On obtient les propriétés suivantes :

La parallèle menée par le point M *à l'axe a et la*

perpendiculaire élevée au point T_b *sur la tangente au point* M *se coupent sur le diamètre de la conique passant par le centre de courbure* μ.

Le centre de courbure μ, *le point* T_p *et la projection du point* N_a *sur le diamètre de la conique parallèle à la normale sont trois points en ligne droite.*

2. Deux tangentes à une parabole sont coupées par les autres tangentes en parties proportionnelles : donc

$$\frac{\mu N_a}{\mu N_b} = \frac{MT_a}{MT_b}.$$

Cette égalité donne plusieurs constructions du centre de courbure μ (Mannheim, *Géométrie descriptive,* p. 174).

3. Soient D et D_1 les points de rencontre de la tangente au point M avec les directrices, F et F_1 les foyers de la conique; les droites DF et D_1F_1 sont tangentes à la parabole (P); si S et S_1 sont les points d'intersection de ces droites avec la normale, on a

$$\frac{\mu S}{\mu S_1} = \frac{MD}{MD_1} = \frac{MF}{MF_1};$$

donc :

Sur les rayons vecteurs MF et MF_1 *on mène des perpendiculaires respectivement par les foyers* F *et* F_1 ; *ces droites coupent la normale en deux points* S et S_1 *tels que*

$$\frac{\mu S}{\mu S_1} = \frac{MF}{MF_1}.$$

De cette égalité on déduit aisément la formule connue

$$\rho = \frac{C'^2}{a\cos\varphi}.$$

4. Dans une hyperbole, le point de contact d'une tan-

gente est le milieu du segment II_1, intercepté sur cette droite par les asymptotes; les tangentes, menées par les points I et I_1 à la parabole (P), déterminent sur la normale $N_a N_b$ deux points équidistants du point μ. Donc :

Dans une hyperbole, aux points où la tangente en M *rencontre les asymptotes, on élève des perpendiculaires à celles-ci; elles rencontrent la normale* $N_a N_b$ *en deux points dont le milieu est le centre de courbure* μ *de la courbe au point* M.

5. Du point R abaissant, sur le diamètre OM, une perpendiculaire rencontrant la normale au point R_2, les points R_1 et R_2 décrivent deux ponctuelles semblables dans lesquelles μ et M sont deux points correspondants. Ces ponctuelles n'ont aucun point double situé à distance finie; elles sont donc identiques : par conséquent

$$R_1 R_2 = \mu M.$$

On retrouve ainsi un théorème de M. Ribaucour (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2[e] série, t. VIII, p. 172).

6. Soient H et H_1 deux points de l'un des axes (par exemple, $N_a T_a$) conjugués par rapport aux foyers réels ou imaginaires, situés sur cet axe. On sait que deux droites conjuguées passant par ces points sont rectangulaires. Cela étant, la droite RH coupe la normale en un point R_3, et les couples $R_1 R_3$ engendrent deux ponctuelles projectives, dans lesquelles μ et M sont deux points correspondants. Le point limite J de la seconde ponctuelle est le pied de la perpendiculaire abaissée du point H sur la normale. L'un des points doubles est le point N_a et la propriété des points H et H_1, rappelée ci-

dessus, nous montre que le second point double E est situé sur la perpendiculaire abaissée du point H sur la droite MH_1. On a donc

$$(\mu N_a E \infty) = (M N_a E J)$$

ou

$$\frac{\mu E}{ME} = \frac{N_a J}{MJ}.$$

Élevons au point N_a une perpendiculaire sur la normale, rencontrant la droite MH au point K; on a

$$\frac{\mu E}{ME} = \frac{KH}{MH},$$

égalité qui montre que la parallèle menée par le point K à la droite HE passe par le centre de courbure μ. Donc :

Si H *et* H_1 *sont deux points conjugués par rapport aux foyers réels ou imaginaires situés sur l'axe a, la perpendiculaire élevée au point* N_a *sur la normale au point* M *coupe les droites* MH *et* MH_1 *en deux points* K *et* K_1, *tels que le centre de courbure* μ *est le point de rencontre des hauteurs du triangle* MKK_1.

Si l'on suppose les points H et H_1 confondus en F, on retrouve une construction connue; il en est de même si H est le centre de la courbe.

7. La perpendiculaire DF élevée au foyer F sur le rayon vecteur MF est tangente à la parabole (P). Cette droite peut donc remplacer l'un des axes de la conique ou la droite $T_a T_b$ dans la détermination du centre de courbure μ, à l'aide du théorème de Brianchon. On obtient ainsi les théorèmes suivants :

Soient G *et* G_1 *les points d'intersection de la droite* DF *avec la normale* $N_a N_b$ *et l'axe b, les parallèles menées de ces points, respectivement à l'axe a et à la normale* $N_a N_b$, *se coupent sur le diamètre* Oμ.

Les parallèles menées par les points M *et* D *respectivement à l'axe a et à la normale se coupent sur la droite* Fμ.

Cette dernière propriété subsiste si l'on remplace les points M et D respectivement par les points N_b et G_1.

L'emploi de la parabole (P) conduit à un grand nombre d'autres propriétés ; mais nous terminerons cette Note en signalant brièvement un moyen d'étendre les recherches qui précèdent. Nous avons trouvé deux ponctuelles semblables (R) et (R_1); si par le point R on mène la seconde tangente à la conique (ou à un cercle tangent à MR), cette tangente et ses analogues déterminent sur une tangente à cette conique (cu à ce cercle) une ponctuelle R' projective à la ponctuelle (R) et par conséquent projective à la ponctuelle (R_1). Dans ces ponctuelles (R') et (R_1), on détermine les points limites, le point qui correspond au centre de courbure μ, et l'on applique les diverses propriétés des ponctuelles projectives.

BIBLIOGRAPHIE.

Premiers principes d'Algèbre, par *C.-A. Laisant*, ancien élève de l'École Polytechnique, docteur ès Sciences mathématiques, et *Élie Perrin,* professeur de Mathématiques à l'École J.-B. Say. Paris, Ch. Delagrave. 1 vol. in-12, de x-345 pages, avec figures dans le texte.

Parmi beaucoup d'Ouvrages de Mathématiques élémentaires, s'adressant à des personnes qui n'ont pas à les approfondir, il serait peut-être difficile de trouver une préoccupation aussi

visible des auteurs de bien faire comprendre les premières notions avec autant de soin qu'il en est donné dans ce petit livre.

Ainsi, la réduction des termes semblables, la règle des signes de la multiplication, l'origine des équations, leur transformation, la discussion des valeurs trouvées pour les inconnues, le développement, en tous détails, de la résolution de l'équation du second degré, la théorie et l'usage des logarithmes sont présentés avec une simplicité qui n'exclut pas la rigueur et qui laisse entrevoir la possibilité d'atteindre des notions plus élevées.

Les auteurs ont apporté la plus grande attention à supprimer les difficultés qu'une exposition trop savante aurait pu faire naître dans l'esprit des élèves. Les démonstrations sont toutes très claires et appuyées d'exemples suffisamment probants et destinés à amener le lecteur, par une gradation bien ménagée, à aborder une étude plus spéciale.

La partie de ce livre destinée aux applications a reçu un développement exceptionnel. C'est là une qualité dont l'importance n'est pas à établir. Les Ouvrages de Mathématiques publiés en France ont avec raison suivi cette tradition dans laquelle nous avons été devancés par l'étranger, notamment par les Anglais. C'est même par là que se distinguent, en France, les éditions successives de certains traités classiques. La liste des exercices proposés y tient une place de plus en plus grande. On a fini par comprendre que le problème est le moyen de faire sortir les Mathématiques du domaine spéculatif pour pénétrer dans la pratique qui est leur vraie justification. La règle la plus simple, la formule la plus élémentaire sont lettre morte pour quiconque ne s'est pas exercé à la résolution de problèmes. C'est donc avec infiniment de raison que les professeurs ont reconnu l'utilité d'y intéresser les élèves. C'est également le motif du succès des nombreux journaux mathématiques fondés depuis une cinquantaine d'années et dont la liste augmente encore, en France comme à l'étranger. Aussi le niveau moyen de l'instruction mathématique s'est-il rapidement relevé. Le problème est donc un élément pédagogique d'une efficacité immédiate; il aiguise l'esprit, éveille l'intelligence, force l'attention, et accommode la difficulté aux efforts nécessaires à la vaincre. Et cela est si vrai que les personnes qui n'ont pas eu l'occasion d'étudier à fond l'Algèbre sont toujours très cu-

rieuses de chercher à y ramener des problèmes élémentaires où elles trouvent un intérêt nouveau, mêlé d'un peu de regret de n'avoir plus à leur disposition un mécanisme dont la puissance avait frappé leur imagination.

Un livre très élémentaire, tel que celui de MM. Laisant et Perrin, nous semble donc appelé à donner des facilités nouvelles à l'étude des principes de l'Algèbre.

Les professeurs et les élèves pourront y trouver matière à plus d'une remarque instructive.

Le cours a été subdivisé en trois Parties et en trente-quatre leçons dont chacune a été terminée par une liste d'environ une trentaine d'exercices proposés.

La solution sommaire ou développée n'est donnée pour aucun d'eux; cela pourra venir dans une prochaine édition; mais nous considérons comme un précieux encouragement pour les élèves la promesse qui leur est faite par M. G. de Lonchamps, directeur du *Journal de Mathématiques élémentaires* et du *Journal de Mathématiques spéciales*, de réserver le meilleur accueil aux solutions de questions inédites et se recommandant par une certaine originalité.

Après avoir énuméré les signes à employer en Algèbre, toute la première Partie est consacrée à l'étude du calcul littéral : opérations sur les monômes et sur les polynômes (p. 5-69, 263 problèmes ou exercices).

Le lecteur, ainsi familiarisé avec ces notions, peut passer au calcul par équations (p. 71-248, 600 questions) dont l'exposé forme la deuxième Partie.

La troisième Partie a pour objet l'étude des progressions arithmétiques et géométriques, et l'usage des logarithmes, ce qui amène à dire quelques mots des formules relatives aux annuités (p. 249-286, 142 questions).

L'Appendice (287-313) a pour objet de compléter quelques propositions énoncées ou établies dans les précédents Chapitres.

Nous signalerons, comme plus particulièrement dignes d'attention, la représentation graphique des fonctions des 1er et 2e degrés, les éléments du triangle arithmétique de Pascal, les principes des formules de combinaisons et l'emploi de l'échiquier dans les questions d'Arithmétique et d'Algèbre.

Le livre se termine par 235 énoncés d'exercices proposés, empruntés en partie à divers Ouvrages ou Recueils. Plusieurs de ces problèmes présentent quelque difficulté; cependant ils

ne devront pas arrêter les élèves qui auront étudié avec attention les applications précédentes.

En résumé, *Les premiers principes d'Algèbre*, par MM. Laisant et Perrin, nous semblent parfaitement adaptés au programme exclusivement utilitaire de l'enseignement classique moderne.

Nous croyons qu'ils seront vivement appréciés du public mathématique et de tous les débutants dans l'étude des éléments de l'Algèbre; cependant nous exprimons le désir que les réponses à la plupart des questions proposées soient indiquées dans une nouvelle édition, afin que les élèves qui voudront s'y exercer y trouvent une vérification de leurs essais.

Cette innovation pourra se faire sous une forme très concise et avec la collaboration des élèves studieux qui auront bien voulu s'y intéresser.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Mannheim.

En rapprochant des résultats provenant de deux solutions différentes d'un même problème, j'ai obtenu une propriété dont la transformation par polaires réciproques conduit à l'énoncé de la question 1625.

Voici une solution géométrique de cette question.

J'appelle f le foyer de l'ellipse donnée, dont les projections i et j sur P et Q appartiennent à N, et z le point de rencontre de P et de Q. Les points f, i, z, j sont sur une circonférence de cercle que je désigne par (1).

La droite nf coupe en l cette circonférence et la droite lz rencontre N au point u.

Les droites ln, lf sont les bissectrices de l'angle ilj : les points n et u partagent donc harmoniquement ij. Les

droites qui joignent z aux points n, i, u, j forment alors un faisceau harmonique; elles coupent T en des points qui forment une division harmonique : donc rl passe par le point m.

Sur fm comme diamètre, je décris une circonférence de cercle que je désigne par (2). Elle coupe T au point t, projection de f sur cette tangente et elle passe par le point l.

Enfin je désigne par (3) la circonférence qui passe par les points t, i, j, et qui n'est autre que la circonférence décrite sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre.

La corde commune à (1) et (2) est fln.

La corde commune à (1) et (3) est N.

Ces deux cordes se coupent en n : la corde commune à (2) et (3) passe alors par ce point et par t : c'est donc T.

Le point m appartient donc à la circonférence (3) qui est fixe : donc, etc.

On m'a demandé l'origine de la question suivante proposée et résolue dans les *Nouvelles Annales*, il y a longtemps.

D'un point pris dans le plan d'une courbe géométrique on mène toutes les tangentes à cette courbe, on divise le rayon de courbure relatif à chaque point de contact par le cube de la distance de ce point au point fixe d'où émanent les tangentes : la somme de tous les rapports ainsi obtenus est égale à zéro.

J'y suis arrivé en transformant par polaires réciproques un théorème dû au Dr Reisset (1), qu'on obtient

(1) Voir mon *Cours de Géométrie descriptive*, 2e édition, p. 215.

lui-même en appliquant le même mode de transformation à ce théorème dû à Duhamel ([1]).

Si l'on mène à une courbe géométrique plane toutes ses tangentes parallèles à une même droite, la somme des rayons de courbure relatifs aux divers points de contact de ces tangentes, sera généralement égale à zéro.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1892 (PREMIÈRE SESSION).

Géométrie analytique.

On donne dans un plan deux axes rectangulaires Ox, Oy, et une droite D dont l'équation est

$$Ax + By + C = 0;$$

sur cette droite on prend un point quelconque M de coordonnées a, b, et à ce point on fait correspondre les deux paraboles qui ont toutes deux le point O pour foyer, et, l'une la droite $x - a = 0$, l'autre la droite $y - b = 0$ pour directrice.

1° Démontrer que ces deux paraboles ont, en général, deux points communs réels et deux points communs imaginaires, et former, selon la position du point M sur la droite D, l'équation de la droite qui passe par les deux points réels communs aux deux paraboles.

2° Trouver le lieu des points communs aux deux paraboles que l'on fait ainsi correspondre à un point M, quand ce point M parcourt la droite D. Ce lieu se compose, en général, d'une ellipse et d'une hyperbole; distinguer sur la droite D la partie que parcourt le point M quand les points communs aux

---

([1]) *Journal de Mathématiques* de Liouville, 1re série, t. VI, p. 364.

deux paraboles sont sur l'ellipse, de celles qu'il parcourt quand ces points sont sur l'hyperbole.

3° Vérifier analytiquement, et expliquer géométriquement les faits suivants. Soit P le point de rencontre de la droite D avec l'un des axes, et soient, sur l'autre axe, de part et d'autre du point O, les points P′ et P″ tels que l'on ait

$$OP' = OP'' = OP.$$

L'une des deux coniques du lieu passe par P′ et l'autre par P″, et les tangentes au lieu, au point P′ et au point P″, sont les droites PP′, PP″.

Construire le lieu en supposant que l'équation de la droite D est

$$x + 2y - 2 = 0.$$

4° Le lieu demandé est, en général, composé d'une véritable ellipse et d'une véritable hyperbole; trouver les divers cas particuliers pour lesquels il en est autrement, et, dans chacun de ces cas, reconnaître ce que deviennent les deux coniques du lieu.

Calcul trigonométrique.

Résoudre un triangle rectangle connaissant sa surface $875617^{m^2},5$ et celle du cercle circonscrit $3356732^{m^2},3$.

Physique.

Évaluer la pression vraie réduite à zéro à l'aide d'un baromètre à vide imparfait.

Nous supposerons faites deux lectures pendant lesquelles la pression atmosphérique x seule n'ayant pas changé, toutes les autres conditions, au contraire, auront été modifiées. Nous nommerons :

Pour les premières observations, faites à t degrés, H la hauteur de la colonne de mercure, lue sur une règle de laiton, et C la capacité de la chambre.

Pour les deuxièmes observations, faites à t_1 degrés :

H_1 et C_1, les quantités analogues;
l, le coefficient de dilatation linéaire du laiton;
m, le coefficient de dilatation du mercure;
α, le coefficient de dilatation cubique des gaz.

Exemple numérique :

$$H = 75^{c},20, \quad t = 10 \quad \frac{C}{C_1} = \frac{1}{2},$$
$$H_1 = 75^{c},65, \quad t_1 = 12$$
$$l = 0,000019,$$
$$m = 0,000182,$$
$$\alpha = 0,00367.$$

Chimie.

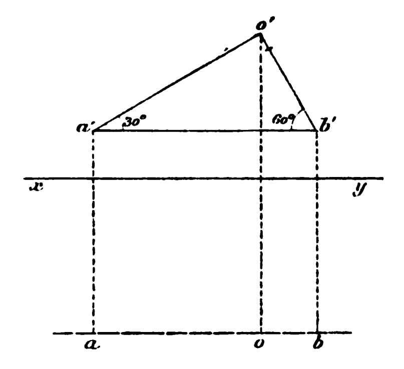
I. Décrire les préparations dans lesquelles on fait usage de l'acide sulfurique.

(L'emploi simultané des deux notations est exigé pour l'écriture des formules.)

II. Analyse, composition et formule du gaz des marais.

Épure.

Dans un plan de front, dont la trace horizontale *aob* est à o^m,128 en avant de la ligne de terre, on donne un triangle rectangle dont l'hypoténuse *a'b'* est horizontale et à o^m,01 au-



dessus de la ligne de terre, son extrémité gauche *a'* étant à o^m,038 du côté gauche du cadre et son extrémité *b'* étant à o^m,17 du même côté du cadre. L'angle en *a'* est de 30°.

On fait tourner ce triangle successivement autour de chacun des côtés de l'angle droit, de manière à engendrer deux cônes et l'on demande de représenter par ses deux projections le

corps solide formé par l'ensemble de ces deux cônes supposés pleins et limités chacun à son sommet et à sa base.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer : 1° un point quelconque de chacune des bases et les tangentes en ces points; 2° un point quelconque de l'intersection des deux cônes et la tangente en ce point.

On n'indiquera pas d'autre construction.

On pourra, à l'aide d'encre de couleur, tracer un certain nombre de génératrices de chacun des cônes; les génératrices vues en trait plein, les génératrices cachées en trait discontinu.

Une légende sur une feuille à part explique succinctement les tracés faits sur l'épure.

Titre extérieur : Intersection de surfaces.
Titre intérieur : Assemblage de deux cônes.

Les titres, en lettres dessinées, sont de rigueur.

Le cadre a $0^{m},45$ sur $0^{m},27$; la ligne de terre est parallèle aux petits côtés du cadre à $0^{m},19$ du petit côté supérieur.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1891;

Par M. AUDIBERT.

Prenons pour axes des y et des x les deux côtés CA et CB du triangle donné.

Les coniques S et S′ sont respectivement circonscrites aux quadrilatères PQMN et PQM′N′ dont les côtés sont représentés par les équations

$$
\begin{array}{ll}
\text{PQ}, & y + cx + d = 0, \\
\text{CP}, & y + px = 0, \\
\text{CQ}, & y + qx = 0, \\
\text{MN}, & mx + ny + r = 0, \\
\text{M}'\text{N}', & m'x + n'y + r' = 0.
\end{array}
$$

Les équations des coniques sont alors

$$(S)\quad \begin{cases} (y+px)(y+qx) \\ \quad +(y+cx+d)(mx+ny+\varepsilon)=0, \end{cases}$$

$$(S')\quad \begin{cases} (y+px)(y+yx) \\ \quad +(y+cx+d)(m'x+n'y+\varepsilon')=0. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$CA = b, \qquad CB = a,$$

les conditions de tangence de ces coniques à l'un des côtés du triangle, au point A pour S, au point B pour S', se traduiront par les formules

$$n = -b\,\frac{b+2d}{(b+d)^2}, \qquad r = \frac{b^2 d}{(b+d)^2},$$

$$m' = -apq\,\frac{ac+2d}{(ac+d)^2}, \qquad r' = \frac{a^2 dpq}{(ac+d)^2},$$

m et n' restent arbitraires.

1° Les droites MN et M'N' passent chacune par un point fixe, puisque l'une et l'autre coupent les axes en des points A_1 et B_1 tels que

$$CA_1 = -\frac{r}{n} = \frac{bd}{b+2d} = b_1,$$

$$CB_1 = -\frac{r'}{m'} = \frac{ad}{ac+2d} = a_1,$$

valeurs indépendantes des paramètres m et n' demeurés arbitraires.

2° Si l'on substitue le triangle CA_1B_1 au triangle CAB dans la définition des deux séries de coniques, on obtiendra deux nouveaux points A_2 et B_2, et l'on aurait de même

$$CA_2 = \frac{b_1 d}{b_1+2d} = b_2, \qquad CB_2 = \frac{a_1 d}{a_1 c+2d} = a_2,$$

et ainsi de suite.

Ces relations peuvent s'écrire

$$\frac{1}{b_1} = \frac{2}{b} + \frac{1}{d}, \qquad \frac{1}{a_1} = \frac{2}{a} + \frac{c}{d},$$

$$\frac{1}{b_2} = \frac{2}{b_1} + \frac{1}{d}, \qquad \frac{1}{a_2} = \frac{2}{a_1} + \frac{c}{d},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{bn} = \frac{2}{b_{n-1}} + \frac{1}{d}, \qquad \frac{1}{an} = \frac{2}{a_{n-1}} + \frac{c}{d}.$$

On en tire

$$\frac{1}{bn} = \frac{2^n}{b} + \frac{1}{d}(2^n - 1), \qquad \frac{1}{an} = \frac{2^n}{a} + \frac{c}{d}(2^n - 1).$$

Mais a_n et b_n étant les coordonnées à l'origine de la droite A_nB_n,

$$\frac{y}{bn} + \frac{x}{an} = 1,$$

l'équation de cette ligne deviendra pour n infini

$$\frac{b+d}{b}y + \frac{ac+d}{a}x = 0.$$

3° Soient $y = \alpha x$, $y = \alpha' x$ les deuxièmes tangentes menées de l'origine aux coniques S et S'. La condition pour que ces tangentes forment avec CP et CQ un faisceau harmonique est

(1) $$\frac{q+\alpha}{p+\alpha} = -\frac{q+\alpha'}{p+\alpha'}.$$

D'autre part, on trouve pour les coefficients angulaires des deux tangentes

$$\alpha = \frac{(cr - dm)^2 - 4rdpq}{4rd(p+q) - \frac{4bd}{b+d}(cr - dm)},$$

$$\alpha' = \frac{4r'd(p+q) - \frac{4adpq}{ac+d}(r' - dn')}{(r' - dn')^2 - 4dr'}.$$

Posant

$$cr - dm = m_1, \qquad r' - dn' = n_1,$$

$$\frac{-2bd}{b+d} = k, \qquad \frac{-2ad}{ac+d} = k', \qquad \sqrt{\frac{-q}{p}} = fl,$$

et introduisant les valeurs de α et de α' dans la formule (1), elle devient, après avoir extrait la racine carrée des deux membres,

$$(2) \qquad \frac{m_1 + kq}{m_1 + kp} = \pm fl \frac{n_1 + k'p}{n_1 + k'q},$$

qu'on peut écrire encore

$$\frac{k(q-p)}{m_1 + kp} + 1 = \pm fl \left[\frac{k'(p-q)}{n_1 + k'q} + 1 \right].$$

Il faut pour la réalité de fl que p et q soient de signes contraires.

Les valeurs de m_1 et de n_1 se déduisent de celles de m et n' tirées des équations

$$\xi \frac{dS}{dx} + \eta \frac{dS}{dy} + \frac{dS}{dz} = 0, \qquad \xi \frac{dS'}{dx} + \eta \frac{dS'}{dy} + \frac{dS'}{dz} = 0,$$

dans lesquelles x et y sont les coordonnées du point de rencontre des deux polaires du point H(ξ, η).

Ces équations étant du premier degré en x, y, m et n' donneront pour ces deux derniers paramètres des valeurs de la forme

$$\frac{Ax + By + C}{A'x + B'y + C'}.$$

Celles qu'on en déduira pour m_1 et n_1 seront aussi de même forme, et, en les introduisant dans la formule (2), on aura finalement pour le lieu cherché une équation du second degré, c'est-à-dire une conique.

4° Les points communs aux coniques S et S' satisfe-

ront à l'équation

$$S - S' = 0$$

ou

$$(y + cx + d)[(m - m')x + (n - n')y + r - r'] = 0.$$

Or, $y + cx + d = 0$ étant l'équation de la droite PQ,

$$(3) \qquad (m - m')x + (n - n')y + r - r' = 0$$

représente la seconde sécante commune.

Quand cette droite sera tangente à S ou à S', les deux coniques se toucheront.

On aura alors

$$\frac{\frac{dS}{dx}}{m - m'} = \frac{\frac{dS}{dy}}{n - n'} = \frac{\frac{dS}{dz}}{r - r'},$$

et la même relation en S', soit quatre équations dont deux sont surabondantes.

A l'aide de $S = 0$, $S' = 0$ on fera disparaître m et n' des numérateurs, et l'on tirera les valeurs des rapports $\frac{m - m'}{r - r}$, $\frac{n - n'}{r - r'}$ qu'on portera dans (3). Le résultat sera l'équation du quatrième degré

$$\begin{aligned}(y + cx + d)^3(rr' + rm'x + r'ny) + (y + cx + d)^2 \\ \times [(p + q)(r + r')xy + 2rpqx^2 + 2r'y^2) \\ -(y + cn + d)(y + pn)(y + pn) \\ \times [(cr + dm')x + (r' + dn)y + d(r + r')] \\ - d\overline{(y + px)(y + qx)}^2 = 0.\end{aligned}$$

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1892 [1];

PAR M. BARISIEN.

I. Soient H et H' les deux autres points d'intersection du cercle (C) avec l'hyperbole (Γ).

L'équation de l'hyperbole étant

$$x^2 - y^2 = a^2, \tag{1}$$

si nous désignons par

$$y - mx - p = 0, \tag{2}$$

$$y + mx - q = 0, \tag{3}$$

les équations des deux droites DD' et HH', l'équation générale des coniques passant par les points D, D', H, H' est

$$\lambda(x^2 - y^2 - a^2) + (y - mx - p)(y + mx - q) = 0.$$

Cette conique est un cercle si

$$\lambda = \frac{1 + m^2}{2},$$

de sorte que l'équation du cercle DD'HH' est

$$(x^2 + y^2)(1 - m^2) - 2m(p - q)x$$
$$- 2(p + q)y - (1 + m^2)a^2 + 2pq = 0.$$

Si nous exprimons que le centre de ce cercle est sur

[1] *Voir* l'énoncé p. 259. Nous avons déjà inséré deux solutions géométriques de la même question (p. 262-267); M. le professeur Lemaire et M. Michel, lieutenant du Génie, nous ont aussi adressé une solution géométrique.

la droite (2), on trouve

$$q = 0.$$

L'équation du cercle (C) de l'énoncé est donc

$$(4)\quad (x^2+y^2)(1-m^2)-2p(y+mx)-a^2(1+m^2)=0.$$

La seconde sécante HH' passe donc par le centre de l'hyperbole, quelle que soit la droite DD'.

Considérons maintenant une corde quelconque perpendiculaire à DD' et dont l'équation soit

$$(5)\qquad y = -\frac{1}{m}x + k.$$

Cette corde rencontre DD' en I, la circonférence aux points E et E' et l'hyperbole en K et K'. Il faudrait démontrer que

$$\overline{IE}^2 = \overline{IE'}^2 = IK.IK'.$$

Cette propriété sera démontrée si nous faisons voir que les points E et E' sont conjugués harmoniques de K et K', ou bien que les droites OE, OE' et OK, OK' joignant le centre de l'hyperbole à E, E', K, K' forment un faisceau harmonique.

Or, l'équation donnant les coefficients angulaires de OK et OK' est

$$(6)\qquad m^2(k^2+a^2)\mu^2+2a^2m\mu+a^2-m^2k^2=0.$$

Celle qui donne les coefficients angulaires de OE et OE' est

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} m^2[(1-m^2)k^2-2pk-a^2(1+m^2)]\mu^2 \\ \quad -2m\mu(m^2+1)(pk+a^2) \\ \quad +(1-m^2)m^2k^2-2pm^2k-a^2(1+m^2)=0. \end{array}\right.$$

Si μ_1 et μ_2 sont les racines de (6) et μ_3 et μ_4 celles de (7), le faisceau O(EE'KK') sera harmonique si la condition

$$(\mu_1+\mu_2)(\mu_3+\mu_4) = 2\mu_1\mu_2 + 2\mu_3\mu_4$$

est vérifiée. Cette vérification se fait sans aucune difficulté. La valeur commune des deux membres de cette relation a pour expression

$$\frac{-4a^2(m^2+1)(pk+a^2)}{m^2(k^2+a^2)[(1-m^2)k^2-2pk-a^2(1+m^2)]}.$$

II. Si la droite DD′ est telle que sa parallèle menée par le centre de l'hyperbole rencontre la courbe, la droite HH′ la rencontre aussi et alors les quatre points d'intersection de (C) et de (Γ) sont réels. Dans le cas contraire, les points H et H′ sont imaginaires.

Du reste, les coordonnées (α, β) du point H sont

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{1-m^2}}, \qquad \beta = \frac{-am}{\sqrt{1-m^2}}.$$

Elles ne sont réelles que si

$$m^2 < 1.$$

III. Lorsque m est constant, les deux sécantes DD′ et HH′ se rencontrent en un point qui est sur la droite fixe HH′. Le lieu des points de rencontre de DD′ et HH′ est donc la droite HH′ elle-même, dont l'équation est

$$y + mx = 0.$$

Il reste à trouver le lieu des points d'intersection des droites DH′ et HH′ ainsi que de DH et D′H′.

L'équation générale des coniques passant par les points D, D′, D′, H est

$$(8) \qquad \lambda(x^2-y^2-a^2)+(y+mx)(y-mx-p)=0.$$

En annulant le discriminant de cette équation, on trouve

$$(9) \qquad \lambda\left[\lambda^2-\lambda(1+m^2)+m^2-\frac{p^2}{4a^2}(1-m^2)\right]=0.$$

Cette équation donne les valeurs de λ correspondant

aux sécantes d'intersection. Il n'y a pas lieu de tenir compte de la valeur $\lambda = 0$ qui correspond aux sécantes DD' et HH'.

Les coordonnées du centre de la conique (8) sont

$$(10) \qquad 2x(\lambda - m^2) - pm = 0,$$

$$(11) \qquad 2y(1 - \lambda) - p = 0;$$

de sorte que nous aurons le lieu des points de rencontre des autres sécantes, en éliminant λ et p entre (9), (10) et (11). Or l'équation (9) peut s'écrire

$$(12) \qquad (\lambda - m^2)(\lambda - 1) = \frac{p^2}{4a^2}(1 - m^2),$$

et, d'après (10) et (11),

$$(13) \qquad (\lambda - m^2)(1 - \lambda) = \frac{p^2 m}{4xy}.$$

En égalant les seconds membres de (12) et (13), l'élimination de λ et p se trouve toute faite, et l'on obtient pour le lieu des points de rencontre de DH' et D'H ainsi que de DH et D'H', la courbe

$$xy = \frac{a^2 m}{m^2 - 1}.$$

C'est une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les axes de l'hyperbole (Γ).

IV. Désignons par (X_1, Y_1) les coordonnées du point A et par (X_2, Y_2), celles de B.

La tangente en H au cercle a pour équation

$$(14) \qquad y - \beta = \mu(x - \alpha),$$

dans laquelle

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{1 - m^2}}, \qquad \beta = -\frac{am}{\sqrt{1 - m^2}} = -m\alpha,$$

$$(15) \qquad \mu = -\left[\frac{\alpha(1 - m^2) - pm}{\beta(1 - m^2) - p}\right].$$

En tenant compte des valeurs de α et de β, cette valeur de μ peut s'écrire

$$(15') \qquad \mu = \frac{a^2 + \beta p}{ma^2 + \alpha p}.$$

L'équation aux abscisses des points d'intersection de (14) avec l'hyperbole (Γ) est

$$x^2(1-\mu^2) - 2\mu(\beta - \mu\alpha)x - a^2 - (\beta - \mu\alpha)^2 = 0.$$

Comme α et X_1 sont racines de cette équation, on en déduit

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{2\mu(\beta - \mu\alpha)}{1-\mu^2} - \alpha, \\ Y_1 &= \frac{2(\beta - \mu\alpha)}{1-\mu^2} - \beta. \end{aligned}\right.$$

La tangente en H à l'hyperbole a pour équation

$$\alpha x - \beta y = a^2.$$

Donc elle est perpendiculaire à DD'. Par suite, le point B est le symétrique de H, par rapport à la droite DD'. On obtient alors pour les coordonnées X_2 et Y_2 de B

$$\left\{\begin{aligned} X_2 &= \frac{2(a^2 + \beta p)}{\alpha - \beta m} - \alpha, \\ Y_2 &= \frac{2(ma^2 + \alpha p)}{\alpha - \beta m} - \beta. \end{aligned}\right.$$

Le coefficient angulaire de la droite AB est, par suite,

$$\frac{Y_1 - Y_2}{X_1 - X_2} = \frac{(\alpha - \beta m)(\beta - \mu\alpha) - (1-\mu^2)(ma^2 + \alpha p)}{\mu(\alpha - \beta m)(\beta - \mu\alpha) - (1-\mu^2)(a^2 + \beta p)}.$$

Or, d'après (15'),

$$a^2 + \beta p = \mu(ma^2 + \alpha p).$$

Il en résulte immédiatement que

$$\frac{Y_1 - Y_2}{X_1 - X_2} = \frac{1}{\mu}.$$

L'équation de la droite AB est donc

$$y - Y_1 = \frac{1}{\mu}(x - X_1)$$

ou

$$y + \beta = \frac{1}{\mu}(x + \alpha).$$

Elle passe donc par le point H' de coordonnées $(-\alpha, -\beta)$ qui est un point fixe.

Remarquons, en finissant, que le lieu des points d'intersection de DD' et de AB est une hyperbole équilatère, dont l'équation

$$(y - mx)(my + x) + 2ma^2 = 0$$

est aisée à trouver.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1892 [1];

SOLUTION PAR M. LE CAPITAINE E.-N. BARISIEN.

I. L'équation générale des coniques doublement tangentes au cercle C aux points d'intersection de ce cercle avec la droite $y - mx = 0$ est

$$\lambda(x^2 + y^2 - 2x - 1) + (y - mx)^2 = 0.$$

Pour exprimer que cette conique est tangente à la droite D, remplaçons dans cette équation y par

$$(x + 1)\sqrt{3},$$

et écrivons que l'équation du second degré en x ainsi obtenue a une racine double. On trouve ainsi

$$\lambda = -\frac{(m^2 + 3)}{2}.$$

---

[1] *Voir* p. 301.

L'équation générale des coniques (A) est donc

$$(A) \qquad (m^2+3)(x^2+y^2-2x-1)-2(y-mx)^2=0.$$

II. Par un point $M(\alpha, \beta)$ du plan, il passe deux coniques de l'espèce A, puisque

$$(1) \qquad (m^2+3)(\alpha^2+\beta^2-2\alpha-1)-2(\beta-m\alpha)^2=0$$

est une équation du second degré en m, donnant deux racines m' et m'', lesquelles correspondent aux coniques A′ et A″. Cette équation développée s'écrit

$$m^2(\beta^2-\alpha^2-2\alpha-1)+4m\alpha\beta+3\alpha^2+\beta^2-6\alpha-3=0.$$

Les valeurs de m' et m'' seront réelles si

$$4\alpha^2\beta^2+(\alpha^2-\beta^2+2\alpha+1)(3\alpha^2+\beta^2-6\alpha-3)>0$$

ou

$$(3\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)+4\beta^2(2\alpha+1)-3(2\alpha+1)^2>0.$$

Le premier membre de cette inégalité représente une quartique ayant deux asymptotes parallèles l'une à la droite D, l'autre à la symétrique de D par rapport à l'axe des x. Elle est tangente à l'axe des x au point où la droite D rencontre cet axe et elle coupe encore cet axe aux mêmes points que le cercle C. Cette quartique coupe aussi l'axe des y aux mêmes points que le cercle C et la droite D.

Pour que les valeurs m' et m'' soient réelles, il faut donc que le point M soit situé dans la région positive de cette quartique.

Le déterminant de la conique (A) a pour expression

$$\Delta=(m^2+3)(m^2-1).$$

Suivant que (m^2-1) sera positif, négatif ou nul, la conique A correspondante sera du genre hyperbole, ellipse ou parabole.

On voit incidemment qu'en faisant $m=\pm 1$ dans l'é-

quation (1), on aura le lieu des points (α, β) tels que l'une des coniques A passant par ces points soit une parabole. On trouve ainsi que ce lieu se compose des deux paraboles

$$(\alpha+\beta)^2 = 4\alpha+2,$$
$$(\alpha-\beta)^2 = 4\alpha+2.$$

III. Les équations des deux coniques A' et A'' sont

$$(\mathrm{A}')\quad (m'^2+3)(x^2+y^2-2x-1)-2(y-m'x)^2 = 0,$$
$$(\mathrm{A}'')\quad (m''^2+3)(x^2+y^2-2x-1)-2(y-m''x)^2 = 0.$$

Elles peuvent s'écrire, en tenant compte de la relation (1),

$$(\beta-m'\alpha)^2(x^2+y^2-2x-1)$$
$$-(y-m'x)^2(\alpha^2+\beta^2-2\alpha-1) = 0,$$
$$(\beta-m''\alpha)^2(x^2+y^2-2x-1)$$
$$-(y-m''x)^2(\alpha^2+\beta^2-2\alpha-1) = 0.$$

Or, par la combinaison de ces deux dernières équations, on peut former la suivante

$$(y-m'x)^2(\beta-m''\alpha)^2-(y-m''x)^2(\beta-m'\alpha)^2 = 0.$$

C'est une conique passant par les quatre points d'intersection de A' et de A''. On voit immédiatement qu'elle se compose des deux droites

$$(2)\quad (y-m'x)(\beta-m''\alpha)-(y-m''x)(\beta-m'\alpha) = 0,$$
$$(3)\quad (y-m'x)(\beta-m''\alpha)+(y-m''x)(\beta-m'\alpha) = 0.$$

Mais l'équation (2) développée devient, après qu'on a enlevé le facteur étranger $(m'-m'')$,

$$(2)'\qquad \alpha y-\beta x = 0.$$

En développant de même (3) et remplaçant $(m'+m'')$ et $m'm''$ par les valeurs

$$m'+m'' = \frac{-4\alpha\beta}{\beta^2-\alpha^2-2\alpha-1},\qquad m'm'' = \frac{3\alpha^2+\beta^2-6\alpha-3}{\beta^2-\alpha^2-2\alpha-1},$$

tirées de (1), on trouve

$$(3)' \qquad \beta y + 3\alpha x = 0.$$

La droite (2)' qui passe déjà par le point M rencontre donc les coniques A' ou A'' en un second point M_1. La droite (3') rencontrera ces coniques aux deux points M_2 et M_3.

Pour avoir les coordonnées de M_1, M_2 et M_3, il faut donc chercher l'intersection des droites (2)' et (3)' avec une conique quelconque passant par les points de rencontre de A' et A''. Or, en retranchant l'une de l'autre les équations (A') et (A''), supprimant le facteur $(m' - m'')$ et remplaçant $(m' + m'')$ par sa valeur tirée de (3), on obtient l'hyperbole équilatère

$$(4) \qquad \alpha\beta(y^2 - x^2 - 2x - 1) - xy(\beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha - 1) = 0.$$

C'est donc avec cette hyperbole (4) que nous allons chercher les points d'intersection des droites (2)' et (3)'.

Coordonnées du point M_1. — Éliminons y entre (2)' et (4), nous obtenons une équation du second degré en x. En tenant compte que l'une des racines est α, on trouve pour les coordonnées x_1 et y_1 de M_1

$$(M_1) \qquad x_1 = -\frac{\alpha}{2\alpha + 1}, \qquad y_1 = -\frac{\beta}{2\alpha + 1}.$$

Coordonnées des points M_2 *et* M_3. — En éliminant de même y entre (3)' et (4), on obtient pour les coordonnées de M_2 et M_3

$$(M_2) \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{\beta\left[\beta + \sqrt{3(2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 1)}\right]}{6\alpha^2 + 2\beta^2 - 6\alpha - 3}, \\[2ex] y_2 = \dfrac{-3\alpha\left[\beta + \sqrt{3(2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 1)}\right]}{6\alpha^2 + 2\beta^2 - 6\alpha - 3}, \end{cases}$$

$$(M_3) \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{\beta\left[\beta - \sqrt{3(2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 1)}\right]}{6\alpha^2 + 2\beta^2 - 6\alpha - 3}, \\[2ex] y_3 = \dfrac{-3\alpha\left[\beta - \sqrt{3(2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 1)}\right]}{6\alpha^2 + 2\beta^2 - 6\alpha - 3}. \end{cases}$$

Il est à remarquer que, si le point (α, β) est sur l'ellipse $2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 1 = 0$, les deux coniques A′ et A″ sont tangentes entre elles au point $x = -1$, $y = \frac{3\alpha}{\beta}$.

IV. L'équation de l'hyperbole équilatère passant par $MM_1M_2M_3$ est toute formée : c'est l'équation (4). Il est facile de voir que cette hyperbole, quel que soit le point (α, β), passe par les deux points situés sur l'axe des y et ayant pour ordonnées ± 1, et qu'elle est tangente à l'axe des x, au point de rencontre de la droite D avec cet axe. Cette hyperbole passe donc bien par quatre points fixes.

V. Si les cordes de direction m' et m'' sont perpendiculaires, on a

$$m'm'' = -1,$$

et, par suite, la relation

$$(5) \qquad \alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha - 2 = 0,$$

ce qui indique que le lieu du point M est le cercle (5).

Si l'on élimine α et β entre les coordonnées de M_1 et l'équation (5), on trouve pour le lieu de M_1 le cercle (5). De même, on retrouve le cercle si l'on élimine α et β entre les équations (3)′, (4) et (5). Les quatre points M, M_1, M_2 et M_3 sont donc sur un même cercle, lorsque les cordes de contact de A′ et A″ sont perpendiculaires.

Ce résultat était à prévoir : en effet, les axes de chaque conique A sont l'un parallèle, l'autre perpendiculaire à la direction m; de sorte que, dans le cas où M′ et M″ sont perpendiculaires, les deux coniques A′ et A″ ont leurs axes parallèles et ont, par suite, leurs points d'intersection sur un même cercle.

Enveloppes des sécantes communes. — La question est ramenée à la suivante :

Étant donné le cercle (5), *on mène par l'origine des coordonnées les deux sécantes* (2)' *et* (3)' *qui rencontrent le cercle en* M, M_1, M_2, M_3. *Trouver l'enveloppe des côtés du quadrilatère* $MM_1M_2M_3$. (Il n'y a pas lieu de chercher l'enveloppe des diagonales MM_1 et M_2M_3 de ce quadrilatère, puisque ces droites passent par l'origine.)

Soit donc le cercle

$$x^2+y^2-4x-2=0$$

et

(6) $$ux+vy-1=0$$

l'équation d'un des côtés du quadrilatère. L'équation des deux droites joignant l'origine aux points d'intersection de ce côté avec le cercle (5) est

$$x^2+y^2-4x(ux+vy)-2(ux+vy)^2=0$$

ou

$$x^2(1-4u-2u^2)-4v(1+u)xy+y^2(1-2v^2)=0.$$

Cette équation doit être identifiée avec

$$(3\alpha x+\beta y)(\beta x-\alpha y)=0$$

ou

$$3\alpha\beta x^2+(\beta^2-3\alpha^2)xy-\alpha\beta y^2=0,$$

ce qui donne

$$\frac{1-2u^2-4u}{3\alpha\beta}=\frac{-4v(1+u)}{\beta^2-3\alpha^2}=\frac{1-2v^2}{-\alpha\beta}.$$

Pour avoir la relation liant u à v, on devrait éliminer α et β entre ces trois rapports et l'équation (5). Or, si l'on considère le premier et le troisième rapport, cette élimination se trouve toute faite, et l'on a la relation

(7) $$u^2+3v^2+2u-2=0.$$

On reconnaît là l'équation tangentielle d'une ellipse

dont l'équation ponctuelle est

(8) $$2x^2+y^2-2x-1=0.$$

Les sécantes communes à A′ et A″ enveloppent donc l'ellipse (8).

Espèce des coniques A′, A″. — L'équation (1) devient, en tenant compte de la relation (5),

$$m^2(3\alpha^2-\beta^2)-8m\alpha\beta-(3\alpha^2-\beta^2)=0.$$

Nous avons vu, au commencement de cet article, que c'est l'expression (m^2-1) qui par son signe montre l'espèce de la conique. Or, si nous posons

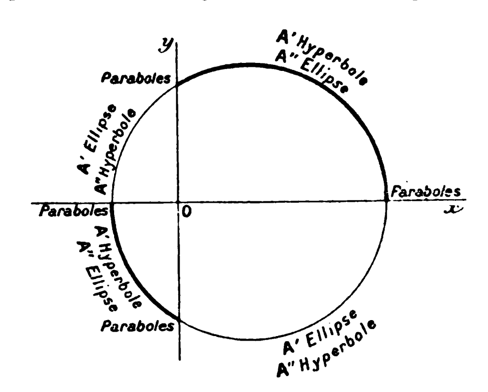
$$\delta=m^2-1,$$

nous trouvons pour les valeurs δ' et δ'' correspondant à m' et m''

$$\delta'=\frac{8\alpha\beta}{(3\alpha^2-\beta^2)^2}\left[4\alpha\beta+\sqrt{16\alpha^2\beta^2+(3\alpha^2-\beta^2)^2}\right],$$

$$\delta''=\frac{8\alpha\beta}{(3\alpha^2-\beta^2)^2}\left[4\alpha\beta-\sqrt{16\alpha^2\beta^2+(3\alpha^2-\beta^2)^2}\right].$$

On voit aisément que, si α et β sont de même signe, la conique A′ est une hyperbole, la conique A″ une el-



lipse. Si α et β sont de signe contraire, c'est A′ qui est une ellipse et A″ une hyperbole.

Quant aux points où le cercle (5) coupe les axes de coordonnées, ils correspondent à deux paraboles, dont les axes sont parallèles aux bissectrices des angles des axes.

On peut encore remarquer que, lorsque $\beta = \alpha\sqrt{3}$, on a

$$m' = 0 \quad \text{et} \quad m'' = \infty;$$

les axes des coniques A' et A'' sont alors parallèles aux axes de coordonnées.

APPLICATION D'UNE MÉTHODE D'ÉVALUATION DE LA SIMPLICITÉ DES CONSTRUCTIONS A LA COMPARAISON DE QUELQUES SOLUTIONS DU PROBLÈME D'APOLLONIUS;

PAR M. ÉMILE LEMOINE.

Dans le numéro de juin 1892, page 227 de ce journal, se trouve le commencement d'un très intéressant article de M. *Maurice Fouché,* sur le célèbre problème d'*Apollonius : Mener les cercles tangents à trois cercles donnés*. Je ne connais pas de question particulière de Géométrie élémentaire qui ait donné lieu à tant de travaux, à tant de diverses et ingénieuses solutions. Il n'y a pour ainsi dire pas d'années où quelque géomètre n'ait publié soit une solution nouvelle, soit des remarques nouvelles, soit quelque démonstration nouvelle au sujet du célèbre problème; et la mine n'est pas épuisée, comme nous le montre M. *Fouché*. Une monographie complète de la question serait très intéressante à bien des égards et je regrette de ne pouvoir l'entreprendre; mais la solution de M. *Fouché* étant, je crois, neuve comme construction et comme marche générale, je pense

intéresser les lecteurs des *Nouvelles Annales*, tout en ne la comparant qu'aux célèbres solutions de *Viète*, de *Bobillier* et *Gergonne* et à une solution très élégante de M. *Mannheim*, au moyen de la méthode d'évaluation que j'ai appelée : *Mesure de la Simplicité et de l'Exactitude*, sous le titre général de : *Art des constructions géométriques*.

L'exposé de cette théorie tenant en quelques lignes, je vais la répéter ici.

Pour permettre de comprendre complètement le développement de la comparaison des solutions, je donnerai aussi, comme application de la théorie, le symbole de toutes les constructions de détail qui entreront dans la mise en œuvre des quatre solutions que je vais examiner.

Si l'on veut bien me suivre, on s'apercevra que cette méthode, si simple dans son principe, exige cependant beaucoup d'attention, d'habitude et même de sagacité pour être employée convenablement.

Théorie générale de la Simplicité et de l'Exactitude dans les constructions géométriques.

Avec une règle, l'on ne peut faire, au point de vue du tracé, que deux opérations :

1° Faire passer le bord de la règle par un point.
Opération : (R_1).

2° Tracer la ligne qui suit le bord de la règle.
Opération : (R_2).

Avec un compas :

1° Mettre une pointe en un point placé.
Opération : (C_1).

2° Mettre une pointe en un point indéterminé d'une ligne tracée...................... Opération : (C_2).

3° Tracer le cercle............. Opération : (C_3).

De sorte que toute construction géométrique, faite avec la règle et le compas, sera ainsi représentée théoriquement par le symbole :

$$\text{Op.} : (M_1 R_1 + M_2 R_2 + N_1 C_1 + N_2 C_2 + N_3 C_3),$$

M_1, M_2, N_1, N_2, N_3 étant des nombres entiers.

Pour abréger le langage, je conviens que O(R) ou O(AB) signifiera : la circonférence dont le centre est O et le rayon R ou AB.

Op. signifie : *opération*.

J'appelle *coefficient de simplicité*, ou plus brièvement *Simplicité* de la construction, le nombre

$$M_1 + M_2 + N_1 + N_2 + N_3,$$

qui représente le nombre d'opérations élémentaires que cette construction a exigées.

J'appelle *coefficient d'exactitude* ou *Exactitude* le nombre $M_1 + N_1 + N_2$.

M_2, N_3 représentent respectivement le nombre de droites et de circonférences tracées ([1]).

([1]) Expliquer ici quelle est l'idée qui a guidé notre choix dans les symboles, le but que poursuit cette représentation des constructions, quelle est la raison qui nous a fait assimiler les deux opérations suivantes : mettre la pointe d'un compas en un point placé, opération que nous appelons C_1 et l'opération *manuellement* différente de mettre la pointe du compas en un point donné B lorsque l'autre est maintenue en A, ce qui arrive pour prendre entre les branches du compas la longueur AB, ..., expliquer cela et bien d'autres questions qui pourraient venir à l'esprit du lecteur, nous entraînerait à des développements beaucoup trop longs et nous renvoyons à notre Mémoire donné à l'Association française pour l'avancement des Sciences, à Oran, en 1888, et *surtout* celui que nous venons de présenter au Congrès de Pau (septembre 1892). Qu'il nous suffise de prouver l'utilité de notre méthode en en constatant un résultat : nous avons montré, par son aide, que toutes (à très peu près) les constructions fondamentales données séculairement dans les éléments de Géométrie étaient trop compliquées; même : *mener par un point*

Applications de la théorie relatives aux solutions comparées du problème d'Apollonius.

I. *Tracer une droite quelconque*.... Op. : (R_2).

II. *Tracer une droite passant par un point placé.* Op. : $(R_1 + R_2)$.

III. *Tracer une droite passant par deux points placés*...................... Op. : $(2R_1 + R_2)$.

IV. *Tracer un cercle de rayon et de centre quelconques*......................... Op. : (C_3).

V. *Tracer un cercle de rayon quelconque dont le centre est donné*.......... Op. : $(C_1 + C_3)$.

VI. *Prendre une longueur donnée* AB *entre les branches d'un compas.* Il faut mettre une pointe en A, une autre en B............. Op. : $(2C_1)$.

VII. *Tracer un cercle de centre et de rayon donnés.* Op. : $(3C_1 + C_3)$.

VIII. *Porter sur une ligne donnée, à partir d'un point placé de cette ligne, une longueur donnée*..................... Op. : $(3C_1 + C_3)$.

IX. *En un point donné* A *sur une droite* AB *mener une droite* AC *qui fasse avec* AB *l'angle* CAB *égal à un angle donné* XOY.

Je trace O(R), A(R)..... Op. : $(2C_1 + 2C_3)$; R est un rayon quelconque.

---

une parallèle à une droite, et nous en avons donné d'autres (Congrès de Pau), les unes un peu plus simples, d'autres de moitié plus simples.

Je prends sur O(R) la corde de l'angle XOY et je la reporte sur A(R), etc.. Op. : $(3C_1+C_3)$;
Je trace AC............. Op. : $(2R_1+R_2)$:

En tout : Op. : $(2R_1+R_2+5C_1+3C_3)$.

Simplicité, 11; exactitude, 7; 1 droite et 3 cercles à tracer.

X. *Tracer un cercle passant par trois points* M, M′, M″.

Je trace trois cercles M(R), M′(R), M″(R), R étant suffisamment grand pour qu'ils se coupent deux à deux............ Op. : $(3C_1+3C_3)$.

Je trace deux de leurs intersections deux à deux; elles se coupent au centre K du cercle cherché................ Op. : $(4R_1+2R_2)$.

Je trace le cercle K(KM). Op. : $(2C_1+C_3)$.
C'est le cercle demandé.

Symbole : Op. : $(4R_1+2R_2+5C_1+4C_3)$.

Simplicité, 15; exactitude, 9; 2 droites, 4 cercles.

XI. *Mener une perpendiculaire au milieu d'une droite donnée.*

Je trace avec un rayon suffisant C(R), C′(R).
Op. : $(2C_1+2C_3)$.

Je trace l'intersection de ces deux cercles.
Op. : $(2R_1+R_2)$.

En tout : Op. : $(2R_1+R_2+2C_1+2C_3)$.

Simplicité, 7; exactitude, 4; 1 droite, 2 cercles.

XI*bis*. *D'un point* A *extérieur à une droite* T, *abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

Je trace A(R), R étant assez grand, pour que A(R) coupe T............. Op. : (C_1+C_3).
A(R) coupe T en B et C.

Je trace B(R), C(R) qui se coupent en A', et je trace AA'. Op. : $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$.

En tout : Op. : $(2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3)$.

Simplicité, 9; exactitude, 5; 1 droite, 3 cercles.

XII. *Par un point O'', mener une parallèle à une droite* OO'.

D'un point quelconque λ je décris un cercle $\lambda(\lambda O'')$ qui coupe OO' en O et en O'.

Op. : $(C_1 + C_3)$.

Je prends OO''.............. Op. : $(2C_1)$.

et je trace $O'(OO'')$ qui coupe $\lambda(\lambda O'')$ (du même côté de OO' que O'') en A... Op. : $(C_1 + C_3)$.

Je trace $O''A$ qui est la parallèle cherchée

Op. : $(2R_1 + R_2)$.

obtenue par le symbole

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3).$$

Simplicité, 9; exactitude, 6; 1 droite et 2 cercles à tracer.

Remarquons que cette construction de la parallèle menée par un point à une droite donnée est un peu plus simple que la construction classique indiquée, depuis *Euclide*, dans tous les Traités de Géométrie, car celle-ci a pour symbole

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3).$$

Simplicité, 11; exactitude, 7; 1 droite et 3 cercles à tracer.

Et, pour ce problème, ce n'est même pas la seule qui soit plus simple que la construction séculaire des Traités de Géométrie.

XIII. *Tracer la tangente à un cercle donné* A *de centre* O *en un de ses points* M.

Je trace M(MO) qui coupe le cercle A en B.

Op. : $(2C_1 + C_3)$.

Je trace B(MO) qui coupe le cercle M(MO) en C.................... Op. : $(C_1 + C_3)$.

Je trace C(MO) qui coupe le cercle B(MO) en D..................... Op. : $(C_1 + C_3)$.

Je trace MD............. Op. : $(2R_1 + R_2)$.

$$\text{Op.} : (2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3).$$

Simplicité, 10; exactitude, 6; 1 droite, 3 cercles.

Cette solution est aussi un peu plus simple que les solutions classiques.

Nous supposons toujours, dans cet article, que, quand un cercle est donné, son centre est placé sans avoir à le déterminer préalablement.

XIV. *Mener d'un point* H *extérieur les deux tangentes à un cercle* O.

Je trace un diamètre quelconque MOμ.

Op. : $(R_1 + R_2)$.

Je prends OH et je décris M(OH), μ(OH) qui se coupent en E...... Op. : $(4C_1 + 2C_3)$.

Je prends EO et je décris H(EO) qui coupe la circonférence O aux points de contact cherchés A et A_1.................. Op. : $(3C_1 + C_3)$.

Je trace HA, A_1H..... Op. : $(4R_1 + 2R_2)$.

$$\text{Op.} : (5R_1 + 3R_2 + 7C_1 + 3C_3).$$

Simplicité, 12; exactitude, 12; 3 droites, 3 cercles.

Remarquons encore que cette construction est plus simple que les constructions classiques : il suffit d'en chercher les symboles pour le voir.

XV. *Placer les centres de similitude ω et ω' de deux circonférences.*

Soient A et B les centres des deux circonférences.

Je trace AB qui coupe la circonférence A en A' et A'', la circonférence B en B' et B'', A' et B' étant pris entre les centres A et B.

Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Sur la circonférence A je prends :
corde $A'\alpha' = A'\alpha'' = A'A$... Op. : $(2C_1 + C_3)$.

Sur la circonférence B je prends :
corde $B''\beta' = B''B$......... Op. : $(2C_1 + C_3)$.
α' et β' étant pris du même côté de AB.

Je trace $\alpha'\beta'$ qui me donne ω par son intersection avec AB............. Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Je trace $\alpha''\beta'$ qui me donne ω' par son intersection avec AB........... Op. : $(2R_1 + R_2)$.

$$\text{Op. : } (4R_1 + 2R_2 + 6C_1 + 3C_3).$$

Simplicité, 15; exactitude, 10; 2 droites, 3 cercles.

Solution graphiquement beaucoup plus simple que les tracés classiques; nous ne répéterons plus cette remarque qui s'applique à presque tous les tracés que nous donnons ici.

XVI. *Tracer les quatre axes de similitude des trois circonférences* O, O', O''.

Je trace OO', $O'O''$, OO''. Op. : $(6R_1 + 3R_2)$.
Par O'', je mène une parallèle à OO'.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$.

Je n'ai plus qu'à joindre les extrémités des rayons parallèles ainsi obtenus dans les trois circonférences O, O', O'' en traçant 4 droites qui

placent les 4 centres de similitude de O et de O″, de O′ et de O″........ Op. : $(8R_1 + 4R_2)$.
Ces 4 centres de similitude me permettent de tracer immédiatement les 4 axes de similitude
Op. : $(8R_1 + 4R_2)$,
qui se trouvent tracés par le symbole

$$\text{Op.} : (24R_1 + 12R_2 + 4C_1 + 2C_3).$$

Simplicité, 42 ; exactitude, 28 ; 12 droites, 2 cercles.

XVII. *Placer le centre radical de trois circonférences données* A, B, C.

Je trace deux circonférences O et O′, qui rencontrent les trois circonférences données.
Op. : $(2C_3)$.
Par leur moyen j'ai les axes radicaux de B et A et de B et C en traçant 8 droites.
Op. : $(16R_1 + 8R_2)$.

$$\text{Op.} : (16R_1 + 8R_2 + 2C_3).$$

Simplicité, 26 ; exactitude, 16 ; 8 droites, 2 cercles.

XVIII. *Placer le pôle p d'une droite* T *par rapport à une circonférence* A *de centre* A.

Deux cas à examiner :

1° T coupe A en M et en N.

Je mène la tangente en M au cercle A.
Op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3)$.
Je trace N(NA) qui coupe en O le cercle M(MA) déjà tracé pour avoir la tangente en M.
Op. : $(C_1 + C_3)$.

Je trace AO qui coupe la tangente en M au pôle cherché p . . . . Op. : $(2R_1 + R_2)$.

$$\text{Op.} : (4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_3).$$

Simplicité, 15; exactitude, 9; 2 droites, 4 cercles.

2° T ne coupe pas le cercle A.

Cette solution s'applique même si T coupe A, pourvu que la distance de A à T soit supérieure à la moitié du rayon de A.

De A j'abaisse sur T une perpendiculaire dont le pied est F et qui coupe A en K du même côté du centre A que F.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3)$.

Je décris F(FA) qui coupe le cercle A en H.

Op. : $(2C_1 + C_3)$.

Je décris H(HA) qui coupe AF en p.

Op. : $(2C_1 + C_3)$.

p est le pôle cherché; car les deux triangles isoscèles semblables AFH, AHp ont le côté AH commun. Donc $\overline{AH}^2$ ou le carré du rayon de A égale $Ap \times AF$.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 7C_1 + 5C_3)$.

Simplicité, 15; exactitude, 9; 1 droite, 5 cercles.

Ces deux solutions constituent à elles deux une construction générale.

Problème d'Apollonius.

Solution de Viète.

Je ne donnerai pas le développement de l'énoncé de cette solution si connue, qui consiste à ramener le pro-

blème à celui de la circonférence tangente à deux circonférences et passant par un point, etc.

Soient A, B, C les centres des trois circonférences ayant pour rayons R_a, R_b, R_c, nous ferons l'hypothèse : $R_a > R_b > R_c$. L'hypothèse de l'égalité de deux ou des trois rayons amènerait des simplifications dans le symbole général de la construction, mais nous n'examinerons, dans les quatre solutions que nous comparons, que le cas général de l'inégalité des trois rayons, car nous ne faisons nullement ici une discussion *complète* des solutions.

Je trace AB qui coupe la circonférence A en a et a', la circonférence B en b et b'; a et b étant les points les plus rapprochés . . . . Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Je prends R_c . . . . Op. : $(C_1 + C_2)$.

Je reporte R_c sur AB de part et d'autre de b' en β et β_1 ; β étant entre b' et B.

Je reporte R_c sur AB de part et d'autre de a' en α et α_1 : α étant entre a' et A . . . . Op. : $(2C_1 + 2C_3)$.
j'appelle α_2 et β_2 les seconds points où $A(A\alpha)$ et $B(B\beta)$ coupent AB, points qui se trouvent placés quand on a tracé les quatre cercles qui suivent.

Je trace $A(A\alpha)$, $A(A\alpha_1)$, $B(B\beta)$, $B(B\beta_1)$.
Op. : $(6C_1 + 4C_3)$.

Je vais maintenant déterminer les centres des quatre circonférences tangentes à $A(A\alpha)$, $B(B\beta)$ et passant en C; pour cela, je place les centres de similitude directe et inverse ω et ω' de ces deux circonférences $A(A\alpha)$, $B(B\beta)$.
Op. : $(4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + 2C_3)$
en économisant le tracé de AB déjà sur l'épure.

Je trace $C\omega$ . . . . Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Parmi les quatre solutions des circonférences tangentes à $B(B\beta)$, $A(A\alpha)$ et passant en C, deux coupe

ront ωC en un point C', les deux autres en un point C''.

Or on sait que l'on a

$$\omega\alpha_2 \times \omega\beta_2 = \omega C \times \omega C' \quad \text{et} \quad \omega\alpha \times \omega\beta = \omega C \times \omega C'';$$

donc, si je fais l'angle $\omega\alpha_2 C' = \omega C \beta_2$, je placerai C' par :

Op. : $(2R_1 + R_2 + 6C_1 + 3C_3)$,

car je n'ai pas besoin de tracer $C\beta_2$: il suffit de décrire les cercles $C(C\beta_2)$, $\alpha_2(C\beta_2)$ et de prendre sur $\alpha_2(C\beta_2)$ un arc égal à celui qui est compris sur $C(C\beta_2)$ entre β_2 et la droite $C\omega$, etc.

Je place de même C'' par :

Op. : $(2R_1 + R_2 + 6C_1 + 3C_3)$.

Je trace maintenant les deux circonférences passant par C et C' et touchant $B(B\beta)$ et les deux circonférences passant par C et C'' et touchant $B(B\beta)$.

Pour cela, je décris une circonférence quelconque passant par C et C', mais coupant $B(B\beta)$. Op. : $(3C_1 + 3C_3)$.

Je trace l'intersection de cette circonférence et de $B(B\beta)$ droite qui coupe CC' en γ.. Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Je mène de γ les deux tangentes à $B(B\beta)$, mais comme je n'ai besoin que de leurs points de contact P et P' je ne trace pas en réalité ces tangentes, et je n'ai pas à tracer non plus un diamètre quelconque de $B(B\beta)$, car je puis me servir d'un diamètre déjà tracé : j'ai donc les points de contact par : .... Op. : $(7C_1 + 3C_3)$.

Je trace la perpendiculaire au milieu de CC'.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$.

Je trace BP, BP' qui coupent cette perpendiculaire aux points O_1, O_2............. Op. : $(4R_1 + 2R_2)$, qui sont les centres des deux circonférences passant en C et C' et tangentes à $B(B\beta)$, circonférences que je n'ai pas besoin de tracer.

J'aurai les centres O_3, O_4 des deux circonférences

tangentes à $B(B\beta)$ et passant par C et C'' par le symbole............ Op. : $(8R_1 + 4R_2 + 11C_1 + 7C_3)$, en opérant de même que pour avoir O_1 et O_2 et en remarquant que j'ai pu économiser un C_1 et un C_3, si j'ai tracé en même temps sans déranger les branches de mon compas la perpendiculaire au milieu de CC' et la perpendiculaire au milieu de CC''.

Il nous faut maintenant placer aussi les quatre centres O'_1, O'_2, O'_3, O'_4 des quatre circonférences passant par C et tangentes à $A(A\alpha_1)$ et à $B(B\beta_1)$; je les aurai par le symbole Op. : $(24R_1 + 12R_2 + 39C_1 + 23C_3)$, comme on peut le voir en récapitulant ce que nous avons fait depuis que nous avons tracé les quatre circonférences $A(A\alpha)$, $A(A\alpha_1)$, $B(B\beta)$, $B(B\beta_1)$.

Les centres O_1, O_2, ..., O_4, O'_1, ..., O'_4 des huit circonférences cherchées sont donc placés; il nous reste à tracer les circonférences elles-mêmes.

Pour tracer celle dont le centre est O_1, je remarque que O_1B déjà tracée pour placer O_1 coupe en Q la circonférence donnée de centre B, et qu'en traçant $O_1(O_1Q)$...................... Op. : $(2C_1 + C_3)$, j'aurai la circonférence cherchée.

Les sept autres seront de même données par

Op. : $(14C_1 + 7C_3)$

La construction totale que nous venons de faire se résume par le symbole

$$\text{Op. : } (52R_1 + 26R_2 + 101C_1 + C_2 + 59C_3).$$

Remarquons que, dans la construction, j'ai dit que je traçais $A(A\alpha)$ et $A(A\alpha_1)$; je l'ai fait pour ne pas trop interrompre l'exposé de la construction, mais ces circonférences ne servent pas, je n'utilise que les points α et α_1 situés sur AB et préalablement marqués; je ne dois donc pas tracer ces circonférences et j'économise

ainsi........................ Op. : $(4C_1 + 2C_3)$;
d'un autre côté, comme α_2 se trouvait placé par le tracé de $A(A\alpha)$ je dois le placer. J'aurai de même à placer le point a'_2, autre extrémité du diamètre de $A(A\alpha_1)$, car j'aurai besoin de a'_2 pour placer O'_1, O'_2, O'_3, O'_4 comme j'ai eu besoin de α_2 pour placer O_1, O_2, O_3, O_4. Je place ces deux points par............... Op. : $(C_1 + C_3)$.
Cette modification n'économise donc en réalité que

Op. : $(3C_1 + C_3)$.

De sorte que la construction de *Viète* (faite aussi économiquement que j'ai pu le faire par une recherche systématique, ce qui ne veut pas dire qu'aucune simplification possible ne m'a échappé) est représentée par le symbole

$$\text{Op.} : (52R_1 + 26R_2 + 98C_1 + C_2 + 58C_3).$$

Simplicité, 234; exactitude, 151; 26 droites, 58 cercles.

SOLUTION DE GERGONNE ET DE BOBILLIER.

Soient A, B, C les trois circonférences données dont j'appelle les centres A, B, C.

Règle générale de la solution.

Je trace les quatre axes de similitude T, T_a, T_b, T_c.

Je place le centre radical ω des trois circonférences données.

Je place les pôles p, q, r; p_a, q_a, r_a; ... des quatre axes de similitude par rapport aux circonférences A, B, C. ωp, ωq, ωr coupent respectivement A aux points a et a', B en b et b', C en c et c', a, b, c étant plus rapprochés de ω respectivement que a', b', c'.

Les circonférences abc, $a'b'c'$ sont tangentes aux trois circonférences données.

On aurait de même les couples de circonférences $a_a b_a c_a$, $a'_a b'_a c'_a$, ..., en traçant ωp_a, ωq_a, ωr_a, ...

Construction.

Je trace les quatre axes de similitude.

Op. : $(24R_1 + 12R_2 + 4C_1 + 2C_3)$.

Je place le centre radical ω.

Op. : $(16R_1 + 8R_2 + 2C_3)$.

Je cherche les douze pôles p, q, r, ... des quatre axes de similitude par rapport aux trois circonférences données.

Pour trouver un pôle, nous avons vu que, suivant les positions de T par rapport au cercle, il *faut* employer deux constructions différentes dont les symboles sont :

Op. : $(4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_3)$,

et................ Op. : $(2R_1 + R_2 + 7C_1 + 5C_3)$.

Mais, comme ils sont équivalents, nous supposerons sans inconvénient, pour évaluer le symbole de la construction, que nous employons la seconde.

Les douze pôles se trouveront donc par

Op. : $(24R_1 + 12R_2 + 84C_1 + 60C_3)$.

Je joins les douze pôles au point ω.

Op. : $(24R_1 + 12R_2)$.

Ce qui place les huit circonférences chacune par leurs points de contact.

Pour en tracer une, je joins le point A au point de contact de cette circonférence sur la circonférence A et le point B au point de contact P de cette circonférence avec la circonférence B.

J'ai ainsi son centre O_1 par deux droites.

Enfin je trace $O_1(O_1P)$.

Les huit circonférences seront donc tracées par

Op. : $(32R_1 + 16R_2 + 16C_1 + 8C_3)$.

et le symbole de la construction totale sera

$$\text{Op.} : (120 R_1 + 60 R_2 + 104 C_1 + 72 C_3).$$

Simplicité, 356; exactitude, 224; 60 droites, 72 cercles ([1]).

SOLUTION DE M. FOUCHÉ.

Je me reporte à la *fig.* 2, p. 235 des *Nouvelles Annales*, 1892, et je signale d'abord dans cette figure deux erreurs de lettres :

1° La lettre N′ qui est placée à côté de A′ doit être placée à la deuxième intersection du cercle MM′M″ et du cercle O′.

2° L'intersection de la droite NQ et du cercle O qui est marquée N′ doit être marquée N_1.

Je vais faire l'analyse graphique de la construction en supposant toujours que je veux tracer les huit cercles tangents aux trois cercles donnés; pour éviter des redites j'adopte sans les expliquer de nouveau les notations de M. *Fouché*.

Je trace les quatre axes de similitude; nous avons vu qu'on les obtient par le symbole

$$\text{Op.} : (24 R_1 + 12 R_2 + 4 C_1 + 2 C_3).$$

Je prends ensuite un point M arbitraire sur la circonférence O, ..., mais, puisqu'il est théoriquement arbitraire, je dois choisir le plus avantageux possible et

---

([1]) Nous pourrions suivre de plus près la construction en appelant l le nombre de positions de T pour lesquelles nous employons la première méthode de construction du pôle; $12 - l$ sera le nombre de positions pour lesquelles nous employons la seconde et le symbole serait :

$$\text{Op.} : [(2l + 120) R_1 + (l + 60) R_2 + (104 - 2l) C_1 + (72 - l) C_3]$$

mais cette spécification nous semble inutile en général.

je prends pour M une intersection de la circonférence O avec OO''.

M'' se trouve placé et j'obtiens M' en traçant MS''.

Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Je trace le cercle $MM'M''$.

Op. : $(4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_3)$.

Je trace MN qui coupe OO' en H. Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Je cherche les points de contact des deux tangentes HA, HA_1 menées de H au cercle O. Op. : $(7C_1 + 3C_3)$.

Je les ai par ce symbole très simple parce que :

1° Je n'ai pas besoin de mener le diamètre $MO\mu$ de la construction XIV, puisqu'il y a déjà le diamètre MO sur la figure.

2° Je n'ai pas besoin de tracer les tangentes HA, HA_1, puisque je ne me servirai que des points de contact A et A_1.

Je place les antihomologues A', A'', A'_1, A''_1 de A et de A_1 sur les deux autres cercles en menant quatre droites........................ Op. : $(8R_1 + 4R_2)$.

Je trace $OA, O'A'$ qui se coupent en ω.

Op. : $(4R_1 + 2R_2)$.

Je trace $OA_1, O'A'_1$ qui se coupent en ω_1.

Op. : $(4R_1 + 2R_2)$.

Enfin je trace $\omega(\omega A)$, $\omega_1(\omega_1 A_1)$.

Op. : $(4C_1 + 2C_3)$,

qui sont la circonférence touchant extérieurement et la circonférence touchant intérieurement les trois circonférences données.

Je vois que tout ce qui a été fait jusqu'au tracé de MN inclus sert pour tracer les trois autres groupes de deux circonférences qui compléteront la solution; je n'ai donc qu'à répéter trois fois le symbole de ce qui a été construit après le tracé de MN, c'est-à-dire à répéter trois fois........... Op. : $(20R_1 + 10R_2 + 11C_1 + 5C_3)$,

et ajouter cela au symbole des constructions analysées en détail jusqu'ici, pour avoir la construction totale ainsi obtenue par le symbole

$$\text{Op.} : (112 R_1 + 56 R_2 + 53 C_1 + 26 C_2).$$

Simplicité, 247; exactitude, 165; 56 droites, 26 cercles.

Solution de M. Mannheim.

Cette solution se trouve dans ce *Journal*, 1885, p. 108.

Soient O, O_1, O_2 les trois circonférences; o, o_1, o_2 leurs centres. Je mène par o, o_1, o_2 trois rayons parallèles et de même sens.

Soit a un point quelconque de O.

Au moyen de rayons parallèles, je construis sur O_1 et O_2, a_1, a_2 antihomologues de a et a'_2 antihomologue de a_1 sur O_2.

Au moyen d'un autre point quelconque α sur O je construis α_2, α'_2 analogues à a_2, a'_2.

Les droites $a_2\alpha'_2$, $a'_2\alpha_2$ se coupent en K, $a_2\alpha_2$, $a'_2\alpha'_2$ en K'.

La droite KK' coupe O_2 en deux points M_2, M'_2 qui sont les points de contact de O_2 avec deux des circonférences demandées.

Ces circonférences touchent O et O_1 en des points qui sont les antihomologues de M_2 et de M'_2.

Pour construire les trois autres couples de deux solutions, il faudra mener par o, o_1, o_2 des rayons parallèles, mais non plus de même sens.

Je désignerai par $+$ le sens adopté pour obtenir M_2 et M'_2 et par $-$ le sens opposé; nous prendrons pour les trois autres couples, les trois combinaisons de sens

déterminées par le Tableau suivant :

Sens des rayons menés......	Par o.	Par o_1.	Par o_2.
Pour un des trois couples...	—	—	+
Pour le deuxième..........	—	+	+
Pour le troisième..........	+	—	+

Construction.

Traçons oo_1 qui coupe O en α, a et O_1 en a_1, α_1.

Ces quatre points se succédant sur oo_1 dans l'ordre α, a, a_1, α_1 .... Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Puisque les points indiqués a et α dans l'énoncé de la solution sont quelconques sur O, je prendrai pour ces points ceux que nous venons de nommer ainsi sur oo_1.

Je mène par o_2 une parallèle à oo_1 qui coupe O_2 en A et B, les points A, o_2, B se trouvant placés de façon que Ao_2B donne le sens +.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_2)$.

En suivant la solution indiquée, on verra que les huit points de contact se trouveront placés sur O_2 en opérant ainsi.

Tracer les huit droites qui joignent les quatre points α, a, a_1, α_1 à A et à B........ Op. : $(16R_1 + 8R_2)$.

Pour avoir chaque couple de points de contact il faut encore mener cinq droites, en tout vingt droites.

Op. : $(40R_1 + 20R_2)$.

Traçons maintenant les huit circonférences, d'abord celle qui touche O_2 en M_2; pour trouver le point M_1 où elle touche O_1, je joindrai M_2 au centre de similitude convenable de O_1 et de O_2, lequel est déjà placé sur l'épure par les droites menées de a_1 et α_1 à A et à B, et je tracerai O_2M_2, O_1M_1 qui se couperont au centre du cercle à tracer. Je tracerai ce cercle.

Les huit cercles seront donc tracés par

$$\text{Op.} : (48R_1 + 24R_2 + 16C_1 + 8C_3)$$

et la construction totale aura pour symbole

$$\text{Op.} : (108R_1 + 54R_2 + 20C_1 + 10C_3).$$

Simplicité, 192; exactitude, 128; 54 droites, 10 cercles.

Résumé.

La solution de *Viète* donne comme symbole

$$\text{Op.} : (52R_1 + 26R_2 + 98C_1 + C_2 + 58C_3).$$

Simplicité, 234; exactitude, 151; 26 droites, 58 cercles.

Celle de *Bobillier* et *Gergonne* :

$$\text{Op.} : (121R_1 + 60R_2 + 104C_1 + 72C_3).$$

Simplicité, 356; exactitude, 224; 60 droites, 72 cercles.

Celle de M. *Maurice Fouché* :

$$\text{Op.} : (112R_1 + 56R_2 + 53C_1 + 26C_2).$$

Simplicité, 247; exactitude, 165; 56 droites, 26 cercles.

Celle de M. *Mannheim* :

$$\text{Op.} : (108R_1 + 54R_2 + 20C_1 + 10C_3).$$

Simplicité, 192; exactitude, 128; 54 droites, 10 cercles.

La moins bonne *pour la construction* est donc la célèbre et didactiquement élégante solution de *Bobillier* et *Gergonne;* son coefficient de simplicité, c'est-à-dire le nombre d'opérations élémentaires qu'elle exige, est : 356. Cela surprendra certainement au premier moment beaucoup de géomètres; j'ai été bien surpris moi-même.

Les deux solutions de M. *Fouché* et de *Viète* s'équivalent à peu près, avec une supériorité cependant du côté de la seconde.

Celle de M. *Mannheim*, qui n'avait, par conséquent, point été suffisamment remarquée, est de beaucoup la meilleure au point de vue où nous nous plaçons, mais bonne pour le cas général, elle ne s'applique pas à tous les cas particuliers ; je ne vois point, par exemple, comment elle conduit à la construction des cercles tangents à un cercle, à une droite, et passant par un point. Si c'est une infériorité *théorique*, elle importe bien peu au dessinateur ; car lorsque parmi les cercles donnés il y en a qui sont les variétés : point ou droite, le problème est plus simple à résoudre que le problème où l'on a réellement trois cercles ; elle s'applique du reste à plusieurs de ces cas particuliers.

J'avais déjà comparé, en 1888, dans le journal *Mathesis*, p. 241, les deux solutions de *Viète* et de *Bobillier* et *Gergonne*, et j'avais donné les symboles suivants :

Solution de *Viète* :

$$\text{Op.} : (100R_1 + 55R_2 + 91C_1 + 5C_2 + 84C_3).$$

Simplicité, 335 ; exactitude, 196 ; 55 droites, 84 cercles.

Solution de *Bobillier* et *Gergonne* :

$$\text{Op.} : (169R_1 + 85R_2 + 134C_1 + 112C_3).$$

Simplicité, 500 ; exactitude, 303 ; 85 droites, 112 cercles.

Résultats très sensiblement *dans le même rapport* que ceux que nous venons de donner, mais numériquement fort différents. La raison de cette différence vaut la peine que nous l'expliquions ; car elle est une démonstration par le fait de l'utilité de l'*art des constructions* ;

d'abord, je venais d'avoir l'idée de la méthode de comparaison que j'ai exposée ici et je n'apportais pas toujours, dans les applications que j'en faisais, toutes les simplifications dont la méthode est susceptible; ensuite, et *surtout*, je me servais des constructions *classiques* que j'avais nombrées telles quelles, sans examen; car, je ne me doutais pas — ce que la méthode m'a montré depuis — que ces constructions classiques si anciennes, si universellement adoptées, étaient presque toutes **trop** compliquées; ainsi j'employais, par exemple, pour construire le pôle d'une droite, une construction classique dont le symbole avait 22 pour simplicité au lieu de 15, comme celui de la construction employée maintenant par nous, etc.

SUR LA DISCUSSION ET LA CLASSIFICATION DES SURFACES DU DEUXIÈME DEGRÉ;

PAR M. CH. MÉRAY,
Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

---

1. Quoique cette question appartienne aux éléments, qu'elle en soit même une des plus rebattues, sa solution ne me paraît pas avoir atteint encore le dernier degré de la perfection. Le procédé maintenant en faveur pour la discussion comporte une décomposition du premier membre de l'équation en carrés d'expressions linéaires spéciales dont le mode de formation varie avec les circonstances et dont les rapports avec les coefficients sont obscurs et sans intérêt; il faut ensuite étudier, à divers points de vue, le système de ces expressions. C'est, en somme, un instrument composite, d'occasion en quelque

sorte aussi, qui fonctionne sans régularité ni élégance. Quant à la considération du centre qui joue toujours le rôle principal dans la classification, elle est fort mal liée à la nature intime de ces surfaces, car elle conduit tantôt à en rapprocher de très dissemblables, comme le cône et l'ellipsoïde, tantôt à en séparer d'autres, telles que l'hyperboloïde et le paraboloïde réglés, telles encore que deux paires de plans, non parallèles dans l'une, parallèles dans l'autre, dont les propriétés générales sont identiques.

Je vais essayer de traiter cette matière avec plus d'uniformité et de précision en assignant des *fonctions déterminées* des coefficients, dont la nullité et les signes indiquent immédiatement la variété de la surface correspondante, en modifiant aussi la classification dans un sens qui semble la rendre plus nette et plus matérielle.

PRÉLIMINAIRES SUR LES FORMES QUADRATIQUES.

2. L'étude des formes d'un degré quelconque exige la connaissance approfondie des propriétés de toutes celles de degrés moindres et surtout des formes linéaires pour lesquelles je renverrai quelquefois le lecteur (par un numéro précédé de la lettre L.) à mon opuscule intitulé : *Exposition nouvelle de la théorie des formes linéaires et des déterminants* [1].

Le type d'une forme quadratique de *largeur* l, c'est-à-dire à l variables $x_1, x_2, \ldots, x_l$, est

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_l) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j,$$

[1] Paris, Gauthier-Villars et fils; 1884.

où chacun des indices i, j prend, indépendamment de l'autre, les valeurs 1, 2, ..., l et où $a_{i,j} = a_{j,i}$ désignent les $\frac{l(l+1)}{1.2}$ coefficients.

Quand tous les coefficients portant quelque indice supérieur à $\lambda < l$ sont $= 0$, ou bien quand on fait

$$x_{\lambda+1} = x_{\lambda+2} = \ldots = x_l = 0,$$

cette forme se réduit en fait à

$$\sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, \lambda),$$

forme en x_1, x_2, ..., x_λ de largeur λ seulement.

Il est très utile de considérer les coefficients $a_{i,j}$ comme éléments de l'abaque carré symétrique (L.4),

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,l}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,l}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_{l,1}, & a_{l,2}, & \ldots, & a_{l,l}, \end{array} \right.$$

que je nommerai l'*abaque* de la forme (1). Il se confond avec celui du système des l formes linéaires en x_1, x_2, ..., x_l que l'on obtient en prenant les demi-dérivées premières de la forme quadratique (1) par rapport à ces diverses variables respectivement.

3. En substituant aux variables x_1, x_2, ..., x_l dans la forme (1) l formes linéaires aux L nouvelles variables X_1, X_2, ..., X_L, savoir :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} M_1^{(1)} X_1 + M_2^{(1)} X_2 + \ldots + M_L^{(1)} X_L, \\ M_1^{(2)} X_1 + M_2^{(2)} X_2 + \ldots + M_L^{(2)} X_L, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ M_1^{(l)} X_1 + M_2^{(l)} X_2 + \ldots + M_L^{(l)} X_L, \end{array} \right.$$

respectivement, on obtient une nouvelle forme quadra-

tique de largeur L en $X_1, X_2, \ldots, X_L$

$$(4)\quad F(X_1, X_2, \ldots, X_L) = \sum_{i,j} A_{i,j} X_i X_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, L),$$

que l'on dit *composée* de la forme *composante* (1) et des formes *simples* (3).

Le théorème qui suit fournit les relations les plus intéressantes entre les coefficients de toutes les formes engagées dans cette opération.

L'abaque des déterminants mineurs d'ordre quelconque q de l'abaque

$$(4)\quad \left\{\begin{matrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & \ldots, & A_{1,L}, \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, & \ldots, & A_{2,L}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ A_{L,1}, & A_{L,2}, & \ldots, & A_{L,L}, \end{matrix}\right.$$

de la forme composée (4) (L.49), *peut être obtenu en procédant comme il suit :*

I. *Quand* $L = l$, *on construira* (*sur un même modèle*) *les abaques* $[a]_q$, $[M]_q$ *des déterminants mineurs d'ordre q de l'abaque* (2) *de la forme composante et de l'abaque* (*alors carré*),

$$(5)\quad \left\{\begin{matrix} M_1^{(1)}, & M_2^{(1)}, & \ldots, & M_L^{(1)}, \\ M_1^{(2)}, & M_2^{(2)}, & \ldots, & M_L^{(2)}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ M_1^{(l)}, & M_2^{(l)}, & \ldots, & M_L^{(l)}, \end{matrix}\right.$$

du système (3) *des formes simples; on formera ensuite l'abaque induit* $\{[a]_q \times [M]_q\}$ *du premier par le second, ligne à colonne* (L.5), *cela de manière que sa* $i^{\text{ième}}$ *ligne ait pour éléments les résultats de l'induction des* 1re, 2e, ..., $l^{\text{ième}}$ *lignes de* $[a]_q$ *par la* $i^{\text{ième}}$ *colonne de* $[M]_q$; *on formera enfin* $\{[a]_q \times [M]_q\} \times [M]_q$,

abaque induit, ligne à colonne encore, de $\{[a]_q \times [M]_q\}$ *par le même second inducteur* $[M]_q$.

II. *Quand* $L > l$, *on agrandira d'abord l'abaque* (2) *de la composante, de* $L - l$ *lignes et d'autant de colonnes, composées d'éléments tous nuls, l'abaque* (5) *des formes simples, de* $L - l$ *lignes quelconques, puis on procédera comme ci-dessus* (1).

III. *Quand* $L < l$, *on opérera encore de la même manière, mais après avoir agrandi de* $l - L$ *colonnes de zéros l'abaque* (5) *des formes simples* [*et aussi de* $l - L$ *lignes et* $l - L$ *colonnes semblables, l'abaque* (4) *de la forme composée*].

I. 1° Pour $q = 1$, le point en question résulte immédiatement de la nature des expressions des coefficients de la forme composée au moyen de ceux de la composante et des formes simples que fournit le calcul direct et de la définition de l'induction de deux abaques offrant une dimension commune (L.5).

2° D'où son exactitude pour toute valeur de q, à cause de la relation fondamentale existant entre les déterminants mineurs d'un même ordre, de trois abaques dont l'un a été engendré par l'induction des deux autres (L.64).

II. Les choses se passent encore comme dans le cas précédent, parce qu'il est évidemment permis de remplacer la composante par une forme quadratique de largeur L où s'évanouit tout coefficient portant quelque indice supérieur à l (2) et le système de l formes simples (3) par celui des L formes linéaires obtenu en lui en adjoignant $L - l$ autres quelconques.

III. Les choses se passent encore de même, parce qu'en fait on ne change pas les formes simples en ajou-

tant à chacune d'elles les termes

$$o.X_{L+1} + o.X_{L+2} + \ldots + o.X_l.$$

4. A cause du rôle important que jouent ainsi dans la composition (et ailleurs encore) les déterminants mineurs d'un même ordre q de l'abaque d'une forme quadratique, il est commode de leur affecter une dénomination spéciale. Nous les nommerons les *discriminants de classe* q de cette forme et nous en formerons, naturellement par la pensée, un abaque carré symétrique ayant pour dimension dans chaque sens le nombre

$$\frac{l(l-1)\ldots(l-q+1)}{1.2\ldots q}.$$

Ceux de classe 1 et leur abaque se confondent avec les coefficients mêmes de la forme et avec ce que nous avons appelé son abaque (2). La classe l en contient un seul que nous dirons *fondamental :* c'est le déterminant même de l'abaque de la forme.

Nous appellerons encore *classe* d'une forme quadratique, la plus élevée de celles de ses discriminants où ils ne s'évanouissent pas tous.

5. Parmi les conséquences variées de tout ce qui précède, nous noterons seulement les suivantes :

I. *La classe de la forme composée ne peut surpasser celle de la composante.* Car tout discriminant de classe q de la première étant une expression linéaire et homogène par rapport à quelques-uns de ceux de la seconde (3) se réduit successivement à o quand tous ces derniers s'évanouissent.

II. *Les classes de ces deux formes sont égales quand le système des formes simples* (3) *est réduit* (L. 9) :

1° En supposant d'abord $L = l$, il existe un système

simple de L formes linéaires en $x_1, x_2, \ldots, x_l$ dont la substitution à $X_1, X_2, \ldots, X_L$ dans le système (3) considéré comme composant conduit au système linéaire

$$
\begin{array}{l}
1.x_1 + 0.x_2 + \ldots + 0.x_l (= x_1), \\
0.x_1 + 1.x_2 + \ldots + 0.x_l (= x_2), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
0.x_1 + 0.x_2 + \ldots + 1.x_l (= x_l),
\end{array}
$$

et dont, par suite, la substitution dans la forme composée régénère la composante. Inversement, donc la forme (1) est composée de la forme composée (4); sa classe, qui ne peut être inférieure à celle de cette dernière (I), ne peut donc non plus la surpasser.

2° Le seul autre cas à considérer est celui où $L > l$, car le système de formes linéaires (3) étant supposé réduit, on ne peut avoir $L < l$. Il se ramène immédiatement au précédent, au moyen de l'artifice déjà employé ci-dessus (3, II), qu'on emploiera toutefois en prenant réduit, comme il est permis de le faire, le système total de L formes linéaires constitué par les l formes données (3) et les $L - l$ auxiliaires à leur adjoindre.

6. Pour que la forme (1) soit composée de quelque composante quadratique de largeur $\mathbf{l} \leqq l$ à discriminant fondamental $\neq 0$ et de quelque système réduit de $\mathbf{l}$ formes linéaires simples en $x_1, x_2, \ldots, x_l$, il faut ainsi (5, II) que sa classe soit égale au nombre $\mathbf{l}$ qui marque évidemment celle de la composante. Nous allons prouver maintenant que *cette condition est suffisante.*

I. *Si les* $\mathbf{l}$ *formes linéaires de largeur* $l \geqq \mathbf{l}$,

$$
(6)\qquad \left\{
\begin{array}{l}
\alpha_1^{(1)} x_1 + \alpha_2^{(1)} x_2 + \ldots + \alpha_{\mathbf{l}}^{(1)} x_{\mathbf{l}} + \alpha_{\mathbf{l}+1}^{(1)} x_{\mathbf{l}+1} + \ldots + \alpha_l^{(1)} x_l, \\
\alpha_1^{(2)} x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_l^{(2)} x_l, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\alpha_{(\mathbf{l})}^{1} x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_l^{(\mathbf{l})} x_l,
\end{array}
\right.
$$

constituent un système réduit et si $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ *désignant une forme quelconque aux mêmes variables, les déterminants de l'abaque à* $\mathfrak{l}+1$ *lignes*

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{llll} \dfrac{d\varphi}{dx_1}, & \dfrac{d\varphi}{dx_2}, & \ldots, & \dfrac{d\varphi}{dx_l}, \\ \alpha_1^{(1)}, & \alpha_2^{(1)}, & \ldots, & \alpha_l^{(1)}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \alpha_1^{(\mathfrak{l})}, & \alpha_2^{(\mathfrak{l})}, & \ldots, & \alpha_l^{(\mathfrak{l})} \end{array}\right.$$

sont tous identiquement nuls, cette forme φ *est certainement composée de formes linéaires simples* (6) ([1]).

En supposant, pour fixer les idées, que $x_1, x_2, \ldots, x_{\mathfrak{l}}$ constituent un groupe de $\mathfrak{l}$ variables dont les coefficients dans les formes (6) donnent un déterminant $\neq 0$, on peut résoudre, par rapport à ces variables, les équations linéaires obtenues en égalant ces formes aux $\mathfrak{l}$ nouvelles variables $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_{\mathfrak{l}}$ après y avoir fait les substitutions

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} x_{\mathfrak{l}+1} = X_{\mathfrak{l}+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_l = X_l, \end{array}\right.$$

$X_{\mathfrak{l}+1}, \ldots, X_l$ désignant $l - \mathfrak{l}$ autres nouvelles variables. On obtient ainsi $\mathfrak{l}$ formules du type

$$(9)\quad x_i = \frac{\delta^{(i,1)}}{\Delta}\mathfrak{x}_1 + \ldots + \frac{\delta^{(i,\mathfrak{l})}}{\Delta}\mathfrak{x}_{\mathfrak{l}} - \ldots - \frac{\Delta_{i,j}}{\Delta}X_j - \ldots - \frac{\Delta_{i,l}}{\Delta}X_l,$$

où, pour abréger, nous avons représenté par Δ le déterminant non nul en question, par $\Delta_{i,j}$ ce qu'il devient quand à sa $i^{\text{ième}}$ colonne ($i \leq \mathfrak{l}$) on substitue celle des

(1) Un théorème bien plus général est fondamental dans la théorie des fonctions composées; mais sa démonstration repose sur des principes étrangers aux éléments.

coefficients de $x_j (j > \mathfrak{l})$ dans le système (6), par $\delta^{(i,i')}$ son mineur complémentaire à l'élément $\alpha_i^{(i')}$.

Les substitutions (8), (9) faites maintenant dans la forme φ donneront une forme $\Phi(\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_\mathfrak{l}, X_{\mathfrak{l}+1}, \ldots, X_l)$ aux l variables $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_\mathfrak{l}, X_{\mathfrak{l}+1}, \ldots, X_l$ pour laquelle il vient immédiatement

$$\frac{d\Phi}{dX_j} = \frac{1}{\Delta}\left[\Delta \frac{d\varphi}{dx_j} - \Delta_{1,j} \frac{d\varphi}{dx_1} - \Delta_{2,j} \frac{d\varphi}{dx_2} - \ldots - \Delta_{\mathfrak{l},j} \frac{d\varphi}{dx_\mathfrak{l}}\right],$$

formule où il faut faire ensuite les substitutions dont il s'agit.

L'expression entre crochet, étant précisément le déterminant des colonnes de rangs j, 1, 2, ..., $\mathfrak{l}$ dans l'abaque (7), est nulle par hypothèse, $\frac{d\Phi}{dX_j}$ aussi, par conséquent; il en résulte que les coefficients des termes de Φ contenant l'une des variables $X_{\mathfrak{l}+1}, \ldots, X_l$ à un degré > 0 sont tous nuls et que cette fonction se réduit ainsi à une forme $f(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_\mathfrak{l})$ aux $\mathfrak{l}$ variables $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_\mathfrak{l}$ seulement. En y faisant la substitution inverse de celle que nous venons d'exécuter, c'est-à-dire en y remplaçant ces $\mathfrak{l}$ variables par les formes linéaires (6), on régénère donc la forme φ, ce qu'il suffisait de prouver.

II. Comme, par hypothèse, les déterminants mineurs du système des l formes linéaires

$$(10)\qquad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,l}x_l, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,l}x_l, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{l,1}x_1 + a_{l,2}x_2 + \ldots + a_{l,l}x_l \end{cases}$$

s'évanouissent tous au delà de l'ordre $\mathfrak{l}$, mais non dans cet ordre lui-même, $\mathfrak{l}$ de ces formes, les $\mathfrak{l}$ premières pour fixer les idées, constituent un système réduit (L.56), et si, dans l'abaque (7), on remplace les $\mathfrak{l}$ dernières

lignes par les coefficients de ces l formes et la première par les demi-dérivées de f, on voit immédiatement que ses déterminants sont tous identiquement nuls. Effectivement, chacun de ces déterminants est une forme linéaire ayant pour coefficients soit des déterminants nuls par eux-mêmes, soit certains discriminants de classe $l+1$, de la forme f, lesquels sont tous nuls par hypothèse. On en conclut (I) que cette forme est bien composée d'une certaine composante de largeur l, $\mathfrak{f}(\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_l)$, et des l premières formes linéaires (10).

Ici, cette composante est quadratique et sa classe est l, puisqu'elle ne peut surpasser ce nombre et que si elle était moindre, celle de la forme composée f serait aussi inférieure à l, contrairement à l'hypothèse (5, I).

Comme la forme $\mathfrak{f}$ est composée de f et des formes linéaires constituant les seconds membres des formules (8), (9), ses coefficients pourront être calculés au moyen des relations générales établies au n° 3.

On remarquera qu'ainsi *une forme quadratique est toujours composée de celles de ses demi-dérivées qui constituent un système réduit équivalent à celui de toutes.*

7. Pour plus de commodité, j'appellerai *zéro* de la forme (1) tout système de valeurs des variables lui donnant la valeur 0 et je le dirai *simple* s'il n'annule pas toutes les dérivées premières de la forme, *double* s'il les annule toutes.

En supposant réels, comme nous le ferons désormais, les coefficients des formes dont nous parlerons, ainsi que les valeurs attribuées aux variables, voici les premières observations à faire à ce sujet :

I. On trouve les zéros doubles réels de la forme (1) en égalant à 0 toutes ses demi-dérivées premières et en

cherchant les systèmes de solutions réelles des l équations linéaires et homogènes ainsi obtenues. *Il y en a donc un seul* ($x_1 = x_2 = \ldots = x_l = 0$), *une infinité simple, double, triple, ..., selon que la classe de cette forme est* l, $l-1$, $l-2$, $l-3$, ...

II. *Quand la forme* (1) *possède un zéro simple réel, elle en possède une infinité d'autres et, parmi les systèmes de valeurs réelles des variables, il y en a nécessairement qui rendent sa valeur, les unes positive, les autres négative.*

En appelant

$$(11) \qquad x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_l,$$

$$(12) \qquad x''_1, \quad x''_2, \quad \ldots, \quad x''_l$$

deux systèmes quelconques de valeurs réelles des variables, et t une indéterminée réelle et prenant

$$(13) \quad x_1 = x'_1 + x''_1 t, \quad x_2 = x'_2 + x''_2 t, \quad \ldots, \quad x_l = x'_l + x''_l t,$$

la forme (1) prend la valeur

$$(14) \qquad P(t) = P^{1,1} + 2P^{1,11} t + P^{11,11} t^2,$$

où, pour abréger, nous avons posé

$$\begin{aligned} P^{1,1} &= f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_l), \\ P^{1,11} &= \frac{1}{2}\left(x''_1 \frac{dP^{1,1}}{dx'_1} + \ldots + x''_l \frac{dP^{1,1}}{dx'_l}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x'_1 \frac{dP^{11,11}}{dx''_1} + \ldots + x'_l \frac{dP^{11,11}}{dx''_l}\right), \\ P^{11,11} &= f(x''_1, x''_2, \ldots, x''_l). \end{aligned}$$

Si le système (12) est un zéro simple, on a $P^{11,11} = 0$ et l'expression (14) se réduit à

$$(15) \qquad P^{1,1} + 2P^{1,11} t;$$

mais les coefficients des quantités (11) dans la seconde

expression de $P^{1,11}$ ne sont pas tous nuls et, pour les valeurs de ces quantités, il existe une infinité de systèmes ne réduisant pas $P^{1,11}$ à o. Pour chacun de ces systèmes, les valeurs (13) des variables constitueront donc un zéro réel en prenant

$$t = t_0 = -\frac{P^{1,1}}{2P^{1,11}};$$

en outre, ce zéro sera simple, car il donne à $\frac{1}{2}\frac{df}{dx_i}$ les valeurs

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dP^{1,1}}{dx'_i} + t_0\frac{dP^{11,11}}{dx''_i}\right),$$

dont la somme des produits par $x''_1, \ldots, x''_l$ se réduit à $P^{1,11} \neq 0$.

Il est évident, enfin, que pour $t \gtrless t_0$ l'expression (15) des valeurs correspondantes de notre forme prendra des valeurs non nulles et de signes contraires.

III. *Si* $P^{1,1}$, $P^{11,11}$, *valeurs de la forme correspondant aux systèmes* (11), (12) *sont toutes deux* $\neq 0$ *et de signes contraires, celle-ci possède quelque zéro simple réel.*

Dans ce cas, en effet, on a certainement

$$P^{1,1}P^{11,11} - (P^{1,11})^2 < 0, \tag{16}$$

et l'équation

$$P(t) = 0$$

du deuxième degré en t offre deux racines réelles t_1, t_2. Les formules (13) donneront donc deux zéros pour la forme, en prenant $t = t_1$ ou $= t_2$ et chacun de ceux-ci est simple. Car si $t = t_1$, par exemple, fournissait un zéro double, on arriverait facilement par le raisonnement ci-dessus (II) aux relations

$$\begin{cases} P^{1,1} + t_1 P^{1,11} = 0, \\ P^{1,11} + t_1 P^{11,11} = 0, \end{cases}$$

dont la coexistence entraînerait la nullité du premier membre de l'inégalité (16).

8. Pour $l = 1$, la forme (1) n'offre évidemment aucun zéro simple. Mais pour $l > 1$, et d'après ce qui précède, *elle en a une infinité de réels ou aucun, selon que, parmi ses valeurs non nulles correspondant aux valeurs réelles des variables, il est possible ou non d'en trouver qui soient de signes différents.*

Les formes du premier genre sont dites *indéfinies*, celles du second *définies* et, en outre, *positives* ou *négatives*, selon que le signe invariable de leurs valeurs non nulles est + ou —.

Le théorème qui fera l'objet du n° 10 permet d'opérer la distinction; mais son énoncé exige une définition qu'il nous faut donner auparavant.

9. Une file (soit horizontale, soit verticale) de l'abaque général des discriminants d'une même classe donnée, de la forme quadratique (1), en renferme toujours un, mais pas davantage, dans l'abaque particulier duquel se trouve quelque diagonale exclusivement composée d'éléments empruntés à la diagonale principale $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, ..., $a_{l,l}$ de l'abaque (2) de cette forme. Et si, comme nous le supposerons désormais, on s'est arrangé de manière que, dans le développement d'un seul discriminant de cette sorte, le produit des éléments de cette diagonale caractéristique soit précédé du signe +, il en sera évidemment de même pour tout discriminant du même genre appartenant à une autre file de l'abaque général dont il s'agit.

Ces discriminants spéciaux doivent parfois être distingués des autres et je les dirai *principaux*. Ceux de classe 1, par exemple, sont précisément $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, ..., $a_{l,l}$ éléments principaux de l'abaque (2) qui, dans f, servent de

coefficients aux carrés des variables; le discriminant fondamental, seul existant dans la classe l, est, en fait, principal, etc. On remarquera que les discriminants principaux de classe q de la forme f sont précisément les discriminants fondamentaux des formes de largeur commune q auxquelles la réduit l'attribution de la valeur o à tous les groupes imaginables de $l - q$ de ses variables.

10. *Pour que la forme* (1) *soit définie, il faut et il suffit que tous ses discriminants principaux non nuls soient positifs quand ils appartiennent aux classes paires et d'un même signe quelconque, quand ils appartiennent aux classes impaires. En outre, elle est positive ou négative, selon que ces derniers le sont tous eux-mêmes.*

I. Comme le changement des signes des coefficients d'une forme négative la rend positive et multiplie chaque discriminant par ± 1, selon que sa classe est paire ou impaire, il nous suffira de faire la démonstration pour les formes positives seulement.

II. *Si la forme* (1) *est définie, toutes celles de largeurs* $l-1$, $l-2$, ..., 2, 1 *auxquelles la réduit l'attribution de la valeur* o *à* 1, 2, ..., $l-2$, $l-1$ *variables choisies à volonté, le sont aussi et, en même temps qu'elle, positives ou négatives*. C'est évident.

III. En représentant par D le discriminant fondamental de la forme (1) et par $A_{i,j}$, généralement, son discriminant de classe $l-1$ constituant le mineur complémentaire à l'élément $a_{i,j}$ de son abaque, par

$$(17) \qquad A_{1,1}, \quad A_{2,2}, \quad \ldots, \quad A_{l,l},$$

en particulier, ses discriminants principaux de classe $l-1$, nous aurons cette proposition préparatoire :

Quand la forme (1) *est positive, l'un quelconque* $A_{i,i}$ *des discriminants principaux* (17) *et* D *ne peuvent être des quantités toutes deux* $\gtrless 0$ *et de signes contraires.*

Pour

$$x_1 = A_{i,1}, \qquad x_2 = A_{i,2}, \qquad \ldots, \qquad x_l = A_{i,l},$$

cette forme écrite

$$\frac{1}{2} x_1 \frac{df}{dx_1} + \frac{1}{2} x_2 \frac{df}{dx_2} + \ldots + \frac{1}{2} x_l \frac{df}{dx_l}$$

prend effectivement la valeur

$$A_{i,i} D,$$

qui doit être non négative.

IV. *Dans la même hypothèse, le discriminant fondamental* D *de la forme considérée* (1) *est positif ou nul :*

1° Soit d'abord une forme binaire, telle que

$$(18) \qquad f(x_1, x_2) = a_{1,1} x_1^2 + 2 a_{1,2} x_1 x_2 + a_{2,2} x_2^2,$$

et supposons-la positive.

Si l'un de ses discriminants de classe 1, $a_{1,1}$ par exemple, est $\gtrless 0$, on a forcément $a_{1,1} > 0$, sans quoi la forme primaire $f(x_{1,0}) = a_{1,1} x_1^2$ serait évidemment négative (II); on a donc $D \geqq 0$, puisque D et $a_{1,1}$ ne peuvent être de signes contraires (III).

Si l'on a $a_{1,1} = a_{2,2} = 0$, on a nécessairement aussi $a_{1,2} = 0$, sans quoi la forme binaire considérée qui se réduit à $2 a_{1,2} x_1 x_2$ serait évidemment indéfinie; il en résulte donc aussi $D = a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2 = 0$.

2° Admettant maintenant le point en question pour toute forme de largeur $< l$, nous prouverons ensuite que,

si dans la forme considérée (1) *un seul des discriminants* (17) $A_{1,1}$ *est nul, on a aussi* $A_{1,j} = 0$, *quel que soit* j, *et, par suite,*

$$D = 0.$$

Pour simplifier l'écriture prenons $I = 1$ et pour fixer les idées supposons $j = 2$.

En multipliant par une nouvelle variable x les variables x_1, x_2, on change la forme (1) en une autre également quadratique aux $l - 1$ variables x, x_3, x_4, ..., x_l et aux deux paramètres x_1, x_2, dont l'abaque est

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{llll} (a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2) & (a_{1,3}x_1 + a_{2,3}x_2) & (a_{1,4}x_1 + a_{2,4}x_2) \ldots & (a_{1,l}x_1 + a_{2,l}x_2) \\ (a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2) & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,l}, \\ (a_{4,1}x_1 + a_{4,2}x_2) & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,l}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \\ (a_{l,1}x_1 + a_{l,2}x_2) & a_{l,3} & a_{l,4} & a_{l,l}, \end{array}\right.$$

et dont le discriminant fondamental se réduit à

$$(20)\qquad A_{1,1}x_2^2 - 2A_{1,2}x_1x_2 + A_{2,2}x_1^2,$$

par une décomposition évidente de la première ligne et de la première colonne de l'abaque ci-dessus (19).

Quels que soient les paramètres x_1, x_2, la nouvelle forme en x, x_3, x_4, .., x_l étant évidemment positive comme la proposée (1), mais de largeur $l - 1$ seulement, son discriminant fondamental est positif ou nul. En d'autres termes, la forme binaire (20) en x_2, x_1 est positive et, par suite, (1°) son propre discriminant

$$A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}^2 = -A_{1,2}^2,$$

à cause de $A_{1,1} = 0$, ne peut être négatif.

On a donc $A_{1,2} = 0$, et, de même,

$$A_{1,1} = A_{1,2} = A_{1,3} = \ldots = A_{1,l} = 0,$$

d'où

$$D = a_{1,1}A_{1,1} + a_{1,2}A_{1,2} + \ldots + a_{1,l}A_{1,l} = 0.$$

3° *Si, au contraire,* $A_{1,1}$ *n'est pas nul,* il est positif en vertu de l'hypothèse, puisqu'il est le discriminant fondamental de la forme $f(x_1, x_2, \ldots, x_{1-1}, 0, x_{1+1}, \ldots, x_l)$ qui est positive (II) et de largeur $l-1$ seulement; D *est donc positif aussi ou nul,* puisqu'il ne peut être de signe contraire à celui de $A_{1,1}$ (III).

4° Notre lemme, établi directement pour $l=2$, subsiste donc pour toute valeur de l, puisque de là les raisonnements ci-dessus (2°), (3°) permettent de l'étendre successivement aux cas où l'on a $l = 3, 4, \ldots$.

V. *Pour que la forme* (1) *soit positive, il faut que chacun de ses discriminants principaux de toutes classes soit une quantité positive ou nulle.*

Car celui des discriminants de classe q qui ne contient aucun des $l-q$ éléments principaux de l'abaque (2) portant les indices $(i_1, i_1), (i_2, i_2), \ldots, (i_{l-q}, i_{l-q})$ est fondamental pour la forme de largeur q à laquelle la proposée se réduit quand on y fait $x_{i_1} = x_{i_2} = \ldots = x_{l-q} = 0$ et qui est positive aussi (II), (IV).

VI. *La condition posée ci-dessus* (V) *est non seulement nécessaire, mais encore suffisante.*

Nous allons effectivement prouver que *si aucun discriminant principal de la forme* (1) *n'est négatif, elle est positive :*

1° *Cela est vrai pour une forme binaire, telle que* (18).

Car, en appelant (x'_1, x'_2), (x''_1, x''_2) deux systèmes réels quelconques de valeurs des variables, l'identité évidente

$$\begin{aligned} f(x'_1, x'_2) f(x''_1, x''_2) &= [a_{1,1} x'_1 x''_1 + a_{1,2}(x'_1 x''_2 + x'_2 x''_1) + a_{2,2} x'_2 x''_2]^2 \\ &+ (a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2)(x'_1 x''_2 - x'_2 x''_1)^2 \end{aligned}$$

montre que les valeurs correspondantes de la forme ne peuvent être de signes contraires, puisque le discriminant principal $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2$ est supposé non négatif.

Si, d'ailleurs, le coefficient $a_{1,1}$ n'est pas nul, il est positif par hypothèse, $f(x'_1, x'_2)$ est > 0 pour $x'_1 \neq 0$, $x'_2 = 0$ et, par suite, $f(x''_1, x''_2)$, ou bien $f(x_1, x_2)$ ne peut acquérir aucune valeur négative.

Si, au contraire, $a_{1,1} = 0$, on a forcément $a_{1,2} = 0$, sans quoi le discriminant principal $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2$ serait négatif, contrairement à l'hypothèse; $f(x_1, x_2)$ se réduit donc, quel que soit x_1, à $a_{2,2}x_2^2$ qui ne peut être une quantité négative, puisque $a_{2,2}$ est supposé ne pas en être une.

2° *Le même théorème supposé établi pour toute forme de largeur $< l$ subsiste pour la forme* (1) *de largeur l.*

Cette forme prenant évidemment les mêmes valeurs que la forme auxiliaire de l'alinéa IV (2°) quand on y attribue toutes les valeurs réelles possibles à ses $l-1$ variables $x, x_3, x_4, \ldots, x_l$ et à ses deux paramètres x_1, x_2, il suffit de prouver que cette dernière est toujours positive et, pour cela, en vertu de l'hypothèse, puisqu'elle est de largeur $l-1$ seulement, de constater que ses discriminants principaux sont positifs ou nuls.

La chose est évidente pour ceux ne dépendant pas de l'élément placé à l'intersection des deux premières files de l'abaque (19), car tous sont des discriminants principaux de la forme (1).

Quant au discriminant fondamental, il se réduit, comme nous l'avons aperçu ci-dessus (IV, 2°), à l'expression (20), forme binaire en x_2, x_1 qui est nécessairement positive. Car ses discriminants principaux de première classe $A_{1,1}$, $A_{2,2}$ sont positifs ou nuls, par hypothèse, puisqu'ils sont pour la forme proposée (1) des discriminants principaux de classe $l-1$, et celui de

seconde classe

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{vmatrix}$$

jouit de la même propriété. Effectivement, les relations générales entre les déterminants mineurs d'un même abaque carré permettent de l'écrire

$$D.\mathfrak{A}_{[(1,1).(2,2)]},$$

où le second facteur est le déterminant de l'abaque (2) dépouillé de ses deux premières lignes et de ses deux premières colonnes, c'est-à-dire un discriminant principal de classe $l-2$ de la forme (1), lequel est comme D positif ou nul par hypothèse.

On raisonnerait de la même manière pour tout autre discriminant principal de la forme auxiliaire dépendant de l'élément placé à l'intersection des premières files de l'abaque (19).

3° *Le théorème en question est donc vrai pour toutes les valeurs de l*, puisque nous l'avons établi directement pour $l=2$ (1°).

11. Quand un discriminant principal de classe q d'une forme définie se trouve être nul, nous avons constaté incidemment (**10**, IV, 2°) qu'il en est de même pour tous ceux non principaux qui appartiennent à la ligne et à la colonne de celui-ci dans l'abaque général des discriminants de cette classe. *Si donc, dans la classe q, tous les discriminants principaux d'une forme définie sont nuls, les autres s'évanouissent tous aussi et la forme ne peut être que d'une classe inférieure à q.*

POINTS DOUBLES, POLES ET PLANS POLAIRES DANS LES SURFACES DU DEUXIÈME DEGRÉ. ABSENCE OU EXISTENCE DE PONTS SIMPLES RÉELS.

12. Les *coordonnées homogènes* d'un point de l'espace sont, comme on le sait, quatre quantités quelconques, mais non toutes $= 0$

(1) $$x, \quad y, \quad z, \quad t,$$

dont les rapports $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ des trois premières à la dernière sont égaux respectivement à ses coordonnées proprement dites relativement à trois axes rectilignes donnés quelconques. De cette manière, chaque point possède une infinité de systèmes de coordonnées; pour un même point, deux systèmes quelconques sont *équivalents*, en ce sens que l'abaque (de dimensions 2, 4), dont ils forment les lignes, a des déterminants toujours nuls; mais pour deux points distincts, les mêmes déterminants ne le sont jamais à la fois.

Inversement, à chaque système de valeurs non toutes $= 0$ des quantités (1) (et à tous les systèmes équivalents) correspond toujours un point de l'espace et un seul ayant ces quantités pour coordonnées homogènes. Ceci suppose toutefois que la quatrième t n'est pas nulle; dans le cas contraire, et pour divers motifs inutiles à rappeler ici, il y a avantage à feindre que le point correspondant existe toujours, mais alors *à l'infini*. Au point de vue analytique les points à l'infini ne diffèrent en rien d'essentiel

13. En coordonnées homogènes, toute surface algébrique peut être représentée par une équation égalant à 0 une forme quaternaire de même degré en x, y, z, t,

et une ligne algébrique par deux équations simultanées de cette sorte. Réciproquement, une pareille équation ou deux, en système, représentent toujours une surface ou une ligne algébriques, sauf le cas où leurs solutions réelles ne forment pas un domaine d'extension suffisante et celui où elles ne donnent que des points à l'infini.

Par exemple, l'équation linéaire et homogène générale

$$ax + by + cz + dt = 0$$

est celle des plans.

Quand $a = b = c = 0$, $d \neq 0$, elle n'a pas d'autres solutions que des coordonnées du point à l'infini et d'ailleurs de pareilles coordonnées les vérifient toujours. En conséquence, les points à l'infini sont considérés comme ayant pour lieu ce qu'on nomme le *plan de l'infini* et l'on regarde les points à l'infini d'une figure (surface ou ligne) comme résultant de son *intersection* par ce plan fictif.

14. D'après cela et en conservant les notations classiques, nous écrirons l'équation générale des surfaces du deuxième degré dites *quadriques* par abréviation

$$f(x, y, z, t) = 0, \tag{2}$$

où

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) = {} & ax^2 + a'y^2 + a''z^2 \\ & + 2byz + 2b'zx + 2b''xy \\ & + 2cxt + 2c'yt + 2c''zt \\ & + dt^2 \end{aligned}$$

est une forme quadratique à coefficients réels non tous $= 0$, ayant pour abaque (2),

$$\begin{matrix} a, & b'', & b', & c, \\ b'', & a', & b, & c', \\ b', & b, & a'', & c'', \\ c, & c' & c'', & d. \end{matrix}$$

Je ne ferai provisoirement aucune distinction entre les points de la surface situés ou non à l'infini et je les dirai *simples* ou *doubles* selon que les coordonnées seront les éléments d'un zéro simple ou double de la forme f (7).

15. L'existence de points doubles exerce une influence majeure sur la configuration de la quadrique, comme le montre le théorème dont voici l'énoncé :

Ont tous leurs points sur la surface : 1° *toute droite joignant un point quelconque à un point double;* 2° *tout plan joignant un point quelconque à deux points doubles (distincts).*

I. Les coordonnées des points de la droite qui joint deux points distincts (x', y', z', t'), (x'', y'', z'', t'') sont fournies indéfiniment par les formules

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x'\lambda' + x''\lambda'', \\ y &= y'\lambda' + y''\lambda'', \\ z &= z'\lambda' + z''\lambda'', \\ t &= t'\lambda' + t''\lambda'', \end{aligned}\right.$$

où λ', λ'' désignent deux indéterminées, et le résultat de leur substitution dans la forme f est

$$(4)\qquad P^{1,1}\lambda'^2 + 2P^{1,11}\lambda'\lambda'' + P^{11,11}\lambda''^2,$$

les notations $P^{1,1}$, $P^{1,11}$, $P^{11,11}$ conservant la signification que nous leur avons donnée au n° 7.

Si donc les deux points considérés appartiennent à la surface, le premier à titre de point double, on a

$$P^{1,1} = \frac{dP^{1,1}}{dx'} = \frac{dP^{1,1}}{dy'} = \ldots = P^{1,11} = P^{11,11} = 0$$

et l'expression (4) est nulle quels que soient λ', λ''.

II. Même démonstration basée sur les formules

$$x = x'\lambda' + x''\lambda'' + x'''\lambda''',$$
$$y = y'\lambda' + \ldots,$$
$$z = z'\lambda' + \ldots,$$
$$t = t'\lambda'' + \ldots,$$

fournissant les coordonnées de tous les points du plan qui déterminent les trois points non en ligne droite (x', y', z', t'), $(x'', \ldots)$, $(x''', \ldots)$.

16. Les coordonnées des points doubles de la quadrique (2) étant les systèmes de solutions non toutes $= 0$, des quatre équations linéaires et homogènes

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{df}{dx} = ax + b''y + b'z + ct = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{df}{dy} = b''x + a'y + bz + c't = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{df}{dz} = b'x + by + a''z + c''t = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{df}{dt} = cx + c'y + c''z + dt = 0, \end{cases}$$

l'un ou l'autre des quatre cas suivants peut se présenter.

I. *La quadrique (c'est-à-dire la forme f) est de première classe* (**4**).

Ces équations se réduisent à une seule et les points doubles sont tous ceux du plan (réel) qu'elle représente et qui appartient tout entier à la surface. Celle-ci se réduit à *ce plan double par lui-même,* car la forme f peut être présentée comme le produit d'une constante $(\neq 0)$ par le carré d'une forme linéaire.

II. *La quadrique est de deuxième classe.*

Les équations (5) se réduisent à deux distinctes et

les points doubles sont tous ceux de la droite (réelle) qu'elles représentent.

La surface comprenant tout plan mené par cette droite double et par une autre quelconque de ses points (15) *se réduit à quelque assemblage de plans passant par la droite double. Ces plans sont au nombre de deux distincts (réels ou imaginaires conjugués)* parce que, F_1, F_2 désignant les premiers membres du système (5) réduit à deux équations, on peut écrire

$$f = A_{1,1}F_1^2 + 2A_{1,2}F_1F_2 + A_{2,2}F_2^2,$$

expression qui, à cause de

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{1,2} & A_{2,2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

est décomposable en deux facteurs linéaires dont les déterminants ne peuvent tous s'évanouir (6).

III. *La quadrique est de troisième classe.*

Les équations (5) se réduisent à trois distinctes donnant *un seul point double (qui est toujours réel) et la surface est un cône ayant ce point pour sommet* (géométriquement un cylindre, quand le même point est à l'infini) puisqu'elle contient entièrement toute droite menée de lui à un autre quelconque de ses points (15).

Le théorème du n° 6 permet de changer le premier membre de l'équation de la surface en une forme composée d'une composante quadratique terminée et des premiers membres des équations de trois plans distincts se coupant au sommet.

IV. *La quadrique est de quatrième classe.*

Elle ne possède alors aucun point double et, comme le premier membre de son équation ne peut résulter

de la composition d'aucune composante quadratique de largeur < 4, *elle ne peut affecter aucune des formes précédentes.*

17. Une connexité très importante se présente encore entre la distribution des points doubles et celle des paires de figures du premier degré qui sont harmoniquement conjuguées par rapport à la quadrique.

Si, par exemple, $(\xi, \eta, \zeta, \theta)$, (Ξ, H, Z, Θ) sont les coordonnées d'un point et d'un plan harmoniquement conjugués, c'est-à-dire pôle et plan polaire l'un à l'autre, on a les quatre relations

$$\begin{aligned}
\rho\Xi &= a\xi + b''\eta + b'\zeta + c\theta,\\
\rho H &= b''\xi + a'\eta + b\zeta + c'\theta,\\
\rho Z &= b'\xi + b\eta + a''\zeta + c''\theta,\\
\rho\Theta &= c\xi + c'\eta + c''\zeta + d\theta,
\end{aligned}$$

où ρ désigne une indéterminée $\neq 0$. On en conclut facilement ce qui suit :

Le plan polaire d'un point double est absolument indéterminé.

Celui d'un point simple est déterminé et contient tous les points doubles pouvant exister.

Dans une quadrique douée de points doubles, tout plan qui n'en contient pas la totalité a pour pôle l'un quelconque d'entre eux et chaque plan les contenant tous a un pôle qui est indéterminé : 1° dans la première classe, d'une manière absolue; 2° dans la deuxième, sur un certain plan passant par la droite des points doubles; 3° dans la troisième, sur une droite passant par le point double unique.

Dans une quadrique dénuée de points doubles (quatrième classe), chaque pôle possède un pôle déterminé.

18. L'existence de points simples réels étant liée à la possibilité d'un changement de signe pour la valeur de la forme f (8), les deux cas ci-après seront à distinguer à ce point de vue.

I. *La forme f est définie.* — La quadrique n'a aucun point simple réel et se réduit géométriquement à l'ensemble des points doubles réels qu'elle peut posséder. On la dit *imaginaire* [sauf le cas où elle est formée d'un plan double où il est toujours réel (16, I)].

II. *La forme f est indéfinie.* — La quadrique offre alors une infinité de points simples réels; elle est *réelle*.

Quant aux moyens d'opérer la distinction, ils sont fournis par le théorème du n° 10.

GÉNÉRATRICES RECTILIGNES.

19. Pour trouver les droites qui peuvent être situées tout entières sur la quadrique

$$f = 0, \tag{1}$$

il suffit de considérer deux points distincts indéterminés de l'espace (x', y', z', t'), (x, y, z, t) et d'exprimer que tous ceux de la droite qui les joint appartiennent à la surface.

En représentant par X', ..., X les valeurs des demi-dérivées de f en ces points et employant les formules (3) du n° 15 (I), on obtient immédiatement les trois conditions

$$f(x', y', z', t') = 0, \tag{2}$$

$$X'x + Y'y + Z'z + T't = Xx' + Yy' + Zz' + Tt' = 0, \tag{3}$$

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{4}$$

Elles expriment, les extrêmes que les points en ques-

tion doivent appartenir à la surface, et la moyenne, que chacun d'eux doit être situé dans le plan tangent construit en l'autre.

En considérant le premier point comme donné sur la surface, le second restera indéterminé sur la ligne représentée par les équations (3), (4), c'est-à-dire sur l'intersection de la surface par son plan tangent en

$$(x', y', z', t'),$$

et ainsi *cette ligne est l'ensemble des génératrices rectilignes passant par le point qu'on s'est donné.*

Si le point donné est double, on a

$$X' = Y' = Z' = T' = 0,$$

l'équation (3) est satisfaite d'elle-même et *toute droite joignant ce point double à un autre point quelconque de la surface est une génératrice rectiligne,* ce que nous savions déjà (15).

S'il est simple, ce que nous supposerons désormais, l'une au moins des quantités X', Y', Z', T' n'est pas nulle et l'on a, par exemple,

$$(5) \qquad T' \neq 0.$$

La condition pour le point indéterminé de ne pas se confondre avec le point donné ne s'opposera donc pas à ce que nous l'assujettissions en outre à être situé dans le plan

$$(6) \qquad T = 0.$$

Cette condition additionnelle réduit les équations (3), (4) à

$$(7) \qquad \begin{cases} Xx' + Yy' + Zz' = 0, \\ Xx + Yy + Zz = 0, \end{cases}$$

et l'on ne peut avoir

$$y'z - z'y = z'x - x'z = x'y - y'x = 0,$$

car les équations (2), (3), écrites

$$X'x' + Y'y' + Z'z' + T't' = 0,$$
$$X'x + Y'y + Z'z + T't = 0,$$

donneraient

$$T'(x't - t'x) = 0;$$

d'où, à cause de l'inégalité (5),

$$x't - t'x = 0,$$

puis, de même,

$$y't - t'y = z't - t'z = 0,$$

et, contrairement à notre convention expresse, le point indéterminé coïnciderait avec le point donné.

En appelant ρ une inconnue auxiliaire, les trois équations simultanées

$$(8)\qquad \begin{cases} X = \rho(y'z - z'y), \\ Y = \rho(z'x - x'z), \\ Z = \rho(x'y - y'x) \end{cases}$$

peuvent être substituées aux deux équations (7) et, après développement, la question revient à trouver tous les systèmes de valeurs de x, y, z, t, ρ, où les quatre premières ne sont pas toutes $= 0$ qui vérifient le système,

$$(9)\qquad \begin{cases} ax + (b'' + z'\rho)y + (b' - y'\rho)z + ct = 0, \\ (b'' - z'\rho)x + a'y + (b + x'\rho)z + c't = 0, \\ (b' + y'\rho)x + (b - x'\rho)y + a''z + c''t = 0; \\ cx + c'y + c''z + dt = 0, \end{cases}$$

L'élimination de x, y, z, t conduit à

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} a & b'' + z'\rho & b' - y'\rho & c \\ b'' - z'\rho & a' & b + x'\rho & c' \\ b' + y'\rho & b - x'\rho & a'' & c'' \\ c & c' & c'' & d \end{vmatrix} = 0;$$

équation en ρ ne contenant que des termes de degrés pairs, parce que le changement de ρ en $-\rho$ laisse son premier membre invariable et dont le degré effectif ne peut surpasser 2, parce que son degré apparent est 3.

Le terme indépendant de ρ est D, discriminant fondamental de la forme f.

Pour calculer le terme en ρ^2 nous remarquerons d'abord qu'une transformation facile, combinée avec l'égalité (2), ramène le premier membre de l'équation (10) à

$$\frac{1}{t'^2}\begin{vmatrix} a & b''+z'\rho & b'-y'\rho & X' \\ b''-z'\rho & a' & b+x'\rho & Y' \\ b'+y'\rho & b-x'\rho & a'' & Z' \\ X' & Y' & Z' & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous remarquerons ensuite que le terme en ρ^2 dans le développement de cette expression est le même que dans celui de

$$\frac{1}{t'^2}\begin{vmatrix} 0 & z'\rho & -y'\rho & X' \\ -z'\rho & 0 & x'\rho & Y' \\ y'\rho & -x'\rho & 0 & Z' \\ X' & Y' & Z' & 0 \end{vmatrix}.$$

Or, en formant ce dernier, il vient

$$-\frac{1}{t'^2}(x'X'+y'Y'+z'Z')^2\rho^2 = -T'^2\rho^2,$$

à cause de la même condition (2). L'équation cherchée en ρ est donc simplement

$$(11) \qquad D - T'^2\rho^2 = 0.$$

Les racines portées successivement dans les équations (9) fourniront autant de systèmes surabondants, mais possibles, d'équations linéaires à résoudre par rapport à x, y, z, t.

20. *Quand on a* $D = 0$ (*quadriques de classes* 1,

2, 3), l'équation (11) donne $\rho = 0$ à cause de l'inégalité (5), les équations (9) se réduisent à celles des points doubles et *au point simple donné, quel qu'il soit, la surface a pour seules génératrices rectilignes la ou les droites le joignant aux points doubles.*

21. *Quand on a* $D \neq 0$ (*quadriques de quatrième classe*), la même équation a deux racines forcément inégales dont l'emploi fournira *au point donné et toujours, quel qu'il soit, deux génératrices rectilignes distinctes.*

Si donc il s'agit d'une quadrique de quatrième classe et s'il est sous-entendu que *le point donné est réel,* on ne pourra se trouver que dans l'un des deux cas suivants :

I. $D < 0$. — *Ces génératrices distinctes sont toujours imaginaires.*

II. $D > 0$. — *Elles sont toujours réelles.*

22. Comme les équations (6), (8) sont linéaires et homogènes en x, y, z, t, il suffira, pour obtenir des équations de la génératrice en (x', y', z', t') qui correspond à une racine déterminée ρ de l'équation (11), d'y considérer x, y, z, t comme des coordonnées courantes et d'en associer deux combinaisons satisfaites pour $x = x', y = y', \ldots$.

On remarquera les types

$$T'Y - X'T = \rho T'(y'z - z'y),$$
$$Z'Y - Y'Z = \rho[Z'(z'x - x'z) - Y'(x'y - y'x)],$$

et aussi l'équation (3) du plan tangent à la quadrique en (x', y', z', t'). On pourra y remplacer ρ par son expression évidente

$$\frac{\pm\sqrt{D}}{cx' + c'y' + c''z' + dt}.$$

POINTS A L'INFINI.

23. Si, en coordonnées homogènes et au point de vue exclusivement analytique, la distribution des points à l'infini d'une surface est chose indifférente, elle n'en donnera pas moins certains traits essentiels de sa configuration géométrique.

L'intersection d'une quadrique quelconque

$$(1) \qquad f(x, y, z, t) = ax^2 + \ldots + dt^2 = 0,$$

avec le plan à l'infini

$$t = 0,$$

se confond avec celle du même plan et de la quadrique auxiliaire

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{f}(x, y, z, t) \\ \quad = f - (2cx + 2c'y + 2c''z + dt)t \\ \quad = ax^2 + \ldots + 2byz + \ldots + 2b''xy = 0, \end{array} \right.$$

dont le premier membre a l'abaque bien plus simple

$$\begin{array}{cccc} a, & b'', & b', & 0, \\ b'', & a', & b, & 0, \\ b', & b, & a'', & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, \end{array}$$

et dont chaque classe $\mathfrak{q}$, égale à celle de la forme ternaire $f(x, y, z, 0)$ d'abaque

$$\left\{ \begin{array}{ccc} b, & b'', & b', \\ b'', & a', & b, \\ a', & b, & a'', \end{array} \right.$$

ne peut surpasser ni 3 *ni celle de la forme* f.

Si les coefficients (3) s'évanouissent tous, la forme $\mathfrak{f}$ est identiquement nulle, ce que nous exprimerons plus commodément en disant qu'elle est *de classe* 0.

Sinon elle n'est pas divisible par t et elle admet tou-

jours le zéro double (o, o, o, $t \neq o$) qui n'est pas à l'infini.

Il en résulte qu'alors *la quadrique auxiliaire* (2) *ne peut comprendre le plan de l'infini comme partie intégrante* et que *le plan ou la droite de ses points doubles ou son point double unique (selon les circonstances) ne peuvent être situés dans ce même plan.*

Ces dernières observations sont indispensables à la discussion de l'intersection dont il s'agit, qui doit être subordonnée à la valeur de la classe q de la quadrique proposée (1).

24. Pour $q = 1$, deux cas seulement sont possibles.

$\mathfrak{q} = 0$. — Le plan de l'infini appartient alors tout entier à la quadrique auxiliaire et, par suite, à la proposée. Comme celle-ci n'a d'autres points que ceux de quelque plan double (**16**, I), *elle se confond avec le plan de l'infini doublé par lui-même.*

$\mathfrak{q} = 1$. — La quadrique auxiliaire est un plan double non à l'infini (**23**). La proposée n'ayant ainsi qu'une droite double sur le plan de l'infini est *un plan double non à l'infini.*

25. Pour $q = 2$, on aura ces trois cas-ci.

$\mathfrak{q} = 0$. — Le plan de l'infini appartient encore à la quadrique proposée et *le surplus de celle-ci est un plan (réel) non à l'infini*. Car elle se compose généralement de deux plans distincts (**16**, II) et ici l'un d'eux est l'infini (partant réel).

$\mathfrak{q} = 1$. — La quadrique proposée a la droite de ses points doubles dans le plan de l'infini et se compose ainsi de *deux plans parallèles (distincts).*

$\mathfrak{q} = 2$. — La quadrique auxiliaire, se composant de deux plans distincts et non parallèles puisque la droite de ses points doubles ne peut être à l'infini (**23**), coupe le plan de l'infini suivant deux droites distinctes. La

proposée également se compose ainsi de *deux plans* (*distincts*) *non parallèles*.

26. Pour $q = 3$, l'hypothèse $\mathfrak{q} = 0$ doit être rejetée parce qu'elle entraînerait $q = 1$, et les cas suivants peuvent seuls se présenter.

$\mathfrak{q} = 1$. — La quadrique auxiliaire étant un plan double, qui ne peut être à l'infini, la proposée est coupée par le plan de l'infini suivant une droite (réelle) doublée par elle-même. Elle a, d'autre part, un point double unique (16, III) situé sur cette génératrice rectiligne (20). Elle est donc un cône ayant son sommet dans le plan de l'infini, de plus tangent à ce plan, c'est-à-dire *un cylindre tangent au plan de l'infini*.

$\mathfrak{q} = 2$. — La quadrique auxiliaire étant une paire de plans distincts, non parallèles (23), la proposée possède à l'infini deux génératrices rectilignes distinctes contenant toujours son point double unique (20). C'est *un cylindre non tangent au plan de l'infini*.

$\mathfrak{q} = 3$. — La quadrique auxiliaire a son point double unique, non à l'infini (23) et coupe ainsi le plan de l'infini suivant une conique ne comprenant aucune droite; la proposée également : elle est donc *un cône proprement dit*, c'est-à-dire dont le sommet n'est pas à l'infini.

27. Pour $q = 4$, les hypothèses $\mathfrak{q} = 0$, $\mathfrak{q} = 1$ sont irréalisables parce qu'elles entraîneraient la première $q = 1$, la seconde $q = 2$ comme on le constatera sans peine. Il reste donc à examiner les suivantes :

$\mathfrak{q} = 2$. — La quadrique auxiliaire étant une paire de plans distincts, non parallèles, trace sur le plan de l'infini deux droites distinctes aussi et ces dernières ont d'ailleurs pour intersection mutuelle la trace (toujours réelle) sur le plan de l'infini de la droite des points doubles de la même quadrique auxiliaire. La proposée

est ainsi *une surface (réelle) tangente au plan de l'infini au point où il est coupé par cette droite de points doubles.*

$\mathfrak{q} = 3$. — La quadrique auxiliaire étant un cône proprement dit coupe le plan de l'infini suivant une conique ne contenant aucune droite. La proposée de même; par suite, *elle n'est pas tangente au plan de l'infini.*

28. L'existence ou la non-existence de quelque *autre,* leur distribution quand il y en a plus d'un, sont des circonstances fort intéressantes en pratique, mais très accessoires en théorie. La considération de ces points comme *pôles du plan de l'infini non situés eux-mêmes à l'infini* lie étroitement les particularités qui les concernent à la classe de la quadrique, ainsi qu'à la distribution de ses points à l'infini. Pour en faire la discussion, il suffit de combiner les indications données au n° 17 et dans ceux qui précèdent celui-ci.

29. Il est évident que *les points (simples) de la quadrique* (1), *qui sont à l'infini, sont imaginaires ou réels, selon que la forme auxiliaire* $\mathfrak{L}$ *est définie ou indéfinie.*

CLASSIFICATION.

30. Chacune des propriétés particulières de la quadrique générale

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

dont l'existence a été reconnue possible dans les paragraphes précédents, constitue *un caractère simple ayant pour criterium unique la nullité ou les signes de quelques-unes des expressions que nous avons nommées les discriminants de la forme* f. Il suffit d'en former toutes les combinaisons admissibles pour obtenir les caractères composés distincts des espèces classiques.

$q =$	f est		$\mathfrak{q} =$		
1			0		Plan double à l'infini (1).
1			1		Plan double non à l'infini.
2, f est	définie		1		Paire de plans imaginaires conjugués, parallèles (1).
2, f est	définie		2		Paire de plans imaginaires conjugués, concourants (2).
2, f est	indéfinie		0		Paire de plans réels dont un seul est à l'infini (3).
2, f est	indéfinie		1		Paire de plans réels parallèles.
2, f est	indéfinie		2		Paire de plans réels concourants.
3, f est	définie		2		Cylindre imaginaire.
3, f est	définie		3		Cône imaginaire (4).
3, f est	indéfinie		1		Cylindre parabolique.
3, f est	indéfinie		2, $\mathfrak{f}$ est	définie	Cylindre elliptique.
3, f est	indéfinie		2, $\mathfrak{f}$ est	indéfinie	Cylindre hyperbolique.
3, f est	indéfinie		3		Cône réel.
4, f est	définie				Ellipsoïde imaginaire (1),
4, f est	indéfinie, D est	< 0	2		Paraboloïde elliptique.
4, f est	indéfinie, D est	< 0	3, $\mathfrak{f}$ est	définie	Ellipsoïde réel.
4, f est	indéfinie, D est	< 0	3, $\mathfrak{f}$ est	indéfinie	Hyperboloïde à deux nappes.
4, f est	indéfinie, D est	> 0	2		Paraboloïde hyperbolique.
4, f est	indéfinie, D est	> 0	3		Hyperboloïde à une nappe.

(1) L'équation $f = 0$ ne représente rien (géométriquement parlant).
(2) L'équation $f = 0$ ne représente qu'une droite.
(3) L'équation $f = 0$ ne représente qu'un plan.
(4) L'équation $f = 0$ ne représente qu'un point.

C'est ce qui est réalisé dans le Tableau dichotomique ci-contre; les caractères simples y sont indiqués dans l'ordre où décroît leur importance relativement à la structure analytique de la forme f. Nous appelons toujours q, D la classe et le déterminant fondamental de cette forme, $\mathfrak{f}$ la forme auxiliaire définie au n° 23 et $\mathfrak{q}$ sa classe.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL EN 1892;

PAR M. MARCHAND,
Professeur au lycée de Versailles.

Une quadrique Q *est circonscrite à un ellipsoïde donné* F.

A *étant le pôle, par rapport à l'ellipsoïde, du plan* P *de la courbe de contact des deux surfaces :*

1° *Démontrer qu'en général il y a trois quadriques* Q_1, Q_2, Q_3 *homofocales avec* E *et telles que les plans polaires* P_1, P_2, P_3 *du point* A *par rapport aux surfaces* Q_1, Q_2, Q_3 *passent par le centre de* Q.

2° *Les plans* P_1, P_2, P_3 *sont les plans principaux de* Q; *et les coniques* C_1, C_2, C_3, *intersections des surfaces* $(P_1 Q_1)$; $(P_2 Q_2)$; $(P_3 Q_3)$, *sont les focales de cette quadrique.*

3° *Les projections orthogonales des coniques* C_1, C_2, C_3 *sur les plans principaux de* E *sont des coniques homofocales. En particulier, on projettera sur le plan principal contenant les axes majeur et moyen de l'ellipsoïde* E. *Chercher le lieu des foyers des coniques*

projetées, quand Q varie en restant circonscrite à E; *le plan* P *de la courbe de contact ne change pas.*

I. Je m'appuierai sur les théorèmes de Chasles relatifs aux réseaux de quadriques.

Appelant S_1, S_2, S_3 trois quadriques données en coordonnées tangentielles, je considérerai l'équation

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 = 0, \tag{1}$$

dans laquelle λ_1, λ_2, λ_3 désignent trois paramètres arbitraires.

Théorème fondamental. — *Deux faisceaux d'un même réseau ont toujours une quadrique commune.*

Comme pour un faisceau de coniques, cela revient à dire que deux équations, telles que

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 = 0, \tag{2}$$

déterminent toujours un système de valeurs uniques de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Le théorème n'a pas de cas d'exception.

Je prends comme bases du réseau l'ellipsoïde E, le cercle imaginaire par lequel passent toutes les sphères C et le point double AA.

Un premier faisceau tangentiel est donné par le point double AA et la conique P déterminée dans E par le plan polaire de A. Une des quadriques de ce faisceau est la quadrique Q de l'énoncé et l'on a ainsi une des propriétés sur lesquelles roulera toute la solution. Les quadriques E et Q entrent symétriquement dans la question proposée.

Prenant E et C comme bases d'un faisceau du réseau, on obtient toutes les quadriques homofocales à E et, par symétrie, on aura toutes les quadriques homofocales à Q.

Soit E' une quadrique homofocale à E. Le faisceau

défini par E' et AA est le faisceau des quadriques circonscrites à E' le long de la courbe P' déterminée par le plan polaire de A par rapport à E'. Le faisceau des quadriques homofocales à Q doit admettre, d'après le théorème fondamental, une quadrique Q' circonscrite à E', la courbe de contact étant P'. La première et la deuxième partie de l'énoncé ne sont que des conséquences immédiates de cette proposition.

Pour toute quadrique E', homofocale à E, le plan polaire relatif à A est aussi plan polaire pour une quadrique Q' homofocale à Q. Or le plan polaire de A par rapport à une quadrique homofocale à Q, c'est-à-dire ayant même centre que Q, ne peut passer par le centre que si la quadrique se réduit à une courbe plane, auquel cas la courbe de contact se réduit à la courbe elle-même. Or, dans le faisceau Q' des homofocales à Q, il n'y a que trois coniques, les trois focales. Par symétrie, il y aura trois quadriques homofocales à Q dont le plan polaire par rapport à A passera par le centre de E et ces trois quadriques passeront par les trois focales de E.

La troisième partie ne présente aucune difficulté. On sait que les cônes de sommet A circonscrits à un faisceau de surfaces homofocales sont homofocaux; le théorème s'applique évidemment aux cylindres circonscrits parallèlement à une direction donnée. Les sections droites des cylindres circonscrits au faisceau des quadriques Q', homofocales à Q (dont fait partie C_1, C_2, C_3) suivant une direction quelconque, sont des coniques homofocales.

Si, conformément à l'énoncé, on projette sur un plan principal de E, on retombe sur le problème du concours général de 1889. En effet, on cherche le lieu des foyers des contours apparents des surfaces Q inscrites à E le long de la conique P. La conique P, étant située sur l'ellipsoïde E, rencontre la section principale en deux

points m et n pour lesquels le plan tangent est vertical. Les points m et n appartiennent donc au contour apparent et alors on est ramené à chercher le lieu des foyers des coniques tangentes à une conique donnée (la section principale de E) en deux points donnés m et n. J'ai démontré (*Nouvelles Annales*, juillet 1889) que le lieu était une strophoïde, l'enveloppe des axes étant une parabole dont la strophoïde est podaire par rapport à un point de la directrice.

La question est donc résolue et il paraît facile de l'étendre de bien des manières. Je me bornerai à démontrer les mêmes résultats par le calcul.

II. Soient α, β, γ les coordonnées du point A,

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0$$

l'équation de l'ellipsoïde E. La quadrique Q aura pour équation

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lambda\left(\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} + \dfrac{z^2}{c} - 1\right) - P^2 = 0, \\ P = \dfrac{\alpha x}{a} + \dfrac{\beta y}{b} + \dfrac{\gamma z}{c} - \delta. \end{array} \right.$$

Si A reste à distance finie, on fera $\delta = 1$; s'il s'éloigne à l'infini, on fera $\delta = 0$.

Je réduirai l'équation (1) par l'application des procédés les plus élémentaires.

Le centre x_1, y_1, z_1 de Q est déterminé par

$$\lambda\frac{x_1}{a} + \frac{\alpha}{a}P_1 = 0, \qquad \lambda\frac{y_1}{b} + \frac{\beta}{b}P_1 = 0, \qquad \lambda\frac{z_1}{c} + \frac{\gamma}{c}P_1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x_1}{\alpha} = \dfrac{y_1}{\beta} = \dfrac{z_1}{\gamma} = \dfrac{P_1}{\lambda} = \dfrac{\delta}{k}, \\ k = \dfrac{\alpha^2}{a} + \dfrac{\beta^2}{b} + \dfrac{\gamma^2}{c} - \lambda. \end{array} \right.$$

Écartant provisoirement le cas où $\delta = 0$ qui donne évidemment $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, on a ces valeurs simples

$$(2) \quad x_1 = \frac{\alpha}{k}, \quad y_1 = \frac{\beta}{k}, \quad z_1 = \frac{\gamma}{k}, \quad k = \frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} + \frac{\gamma^2}{c} - \lambda.$$

Je forme maintenant l'équation en s. J'écris

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}\right) - p^2 - s(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$p = \frac{\alpha x}{a} + \frac{\beta y}{b} + \frac{\gamma z}{c},$$

j'égale à zéro les dérivées partielles

$$x\left(\frac{\lambda}{a} - s\right) - p\,\frac{\alpha}{a} = 0,$$

$$y\left(\frac{\lambda}{b} - s\right) - p\,\frac{\beta}{b} = 0,$$

$$z\left(\frac{\lambda}{c} - s\right) - p\,\frac{\gamma}{c} = 0$$

et, substituant dans l'identité qui définit p, j'obtiens l'équation en s, sous la forme de Jacobi,

$$(3) \qquad 1 = \frac{\alpha^2}{a^2\left(\frac{\lambda}{a} - s\right)} + \frac{\beta^2}{b^2\left(\frac{\lambda}{b} - s\right)} + \frac{\gamma^2}{c^2\left(\frac{\lambda}{c} - s\right)},$$

et comme δ n'y entre pas, cette formule s'applique, que A soit à distance finie ou infinie.

Cette équation se transforme aisément. Multipliant par λ,

$$\lambda = \frac{\alpha^2(\lambda - as + as)}{a(\lambda - as)},$$

et comme

$$\frac{\alpha^2(\lambda - as + as)}{a(\lambda - as)} = \frac{\alpha^2}{a} + \frac{\alpha^2}{\frac{\lambda}{s} - a},$$

l'équation en s devient, en définitive,

$$(4) \qquad \frac{\alpha^2}{a-\frac{\lambda}{s}}+\frac{\beta^2}{b-\frac{\lambda}{s}}+\frac{\gamma^2}{c-\frac{\lambda}{s}}-k=0.$$

Cette équation s'applique encore si A est à l'infini; si l'on fait à la fois $\delta=0$, $k=0$, ce qui correspond au cylindre, les valeurs du centre se présenteraient sous la forme $\frac{0}{0}$, mais, l'équation (1) ne contenant pas de termes du premier degré, le cylindre est rapporté à un de ses centres, de sorte que sa forme réduite est

$$s'x^2+s''y^2-\lambda=0, \qquad \lambda=\frac{\alpha^2}{a}+\frac{\beta^2}{b}+\frac{\gamma^2}{c},$$

s' et s'' étant les racines de

$$\frac{\alpha^2}{a-\frac{\lambda}{s}}+\frac{\beta^2}{b-\frac{\lambda}{s}}+\frac{\gamma^2}{c-\frac{\lambda}{s}}=0.$$

Revenant au cas général où le centre est quelconque, les formules (2) permettent d'écrire, en posant $\frac{\lambda}{s}=\rho$,

$$(5) \qquad \frac{\alpha x_1}{a-\rho}+\frac{\beta y_1}{b-\rho}+\frac{\gamma z_1}{c-\rho}-1=0.$$

Les racines de (5) sont évidemment les paramètres ρ_1, ρ_2, ρ_3 des trois quadriques Q_1, Q_2, Q_3 de l'énoncé. Les termes du second degré de l'équation (1) deviendront

$$\frac{\lambda}{\rho_1}x^2+\frac{\lambda}{\rho_2}y^2+\frac{\lambda}{\rho_3}z^2.$$

Dans le cas général où δ n'est pas nul, il reste à transporter l'origine au centre. Prenant les notations usuelles, on sait que le nouveau terme constant sera

$$\begin{aligned} D_1 &= Cx_1+C'y_1+C''z_1+D \\ &= \frac{\alpha}{a}\frac{\alpha}{k}+\frac{\beta}{a}\frac{\beta}{k}+\frac{\gamma}{a}\frac{\gamma}{k}-\lambda-1 \\ &= \frac{k+\lambda}{k}-\lambda-1=\frac{\lambda(1-k)}{k}. \end{aligned}$$

La quadrique Q rapportée à ses axes a pour équation

$$(6) \qquad \frac{x^2}{\rho_1} + \frac{y^2}{\rho_2} + \frac{z^2}{\rho_3} + \frac{1-k}{k} = 0,$$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 étant les racines de l'équation (5).

La première et la deuxième partie de l'énoncé résultent de ce calcul.

Il est clair, en effet, que si j'étais parti, non de E, mais d'une quadrique E′ homofocale à E

$$(\mathrm{E}') \qquad \frac{x^2}{a-\rho'} + \frac{y^2}{b-\rho'} + \frac{z^2}{c-\rho'} - 1 = 0,$$

le calcul précédent me donnerait pour la quadrique Q circonscrite à E′ le long de la courbe P′ déterminée par le plan polaire de A

$$(\mathrm{Q}') \qquad \frac{x^2}{\rho_1-\rho'} + \frac{y^2}{\rho_2-\rho'} + \frac{z^2}{\rho_3-\rho'} + \frac{1-k}{k} = 0,$$

puisque dans l'équation (5) il faut remplacer a, b, c par $a-\rho'$, $b-\rho'$, $c-\rho'$ et que cela revient à diminuer toutes les racines de ρ'.

La symétrie des surfaces E et Q apparaît d'une manière très nette. On a les deux faisceaux

$$\frac{x^2}{a-\rho} + \frac{y^2}{b-\rho} + \frac{z^2}{c-\rho} - 1 = 0,$$
$$\frac{x^2}{\rho_1-\rho} + \frac{y^2}{\rho_2-\rho} + \frac{z^2}{\rho_3-\rho} + \frac{1-k}{k} = 0.$$

Si l'on donne à ρ la même valeur, on a deux surfaces correspondantes circonscrites l'une à l'autre, de telle manière que A soit pôle du plan de contact. Aux trois surfaces Q_1, Q_2, Q_3 déterminées par les valeurs ρ_1, ρ_2, ρ_3 du paramètre, correspondent les trois focales C_1, C_2, C_3 de Q, qui sont alors les intersections de Q_1, Q_2, Q_3, par les plans polaires P_1, P_2, P_3 relatifs au point A.

J'arrive à la troisième partie. Les projections de C_1, C_2, C_3 sur un plan quelconque sont homofocales. Cela résulte de ce théorème bien connu, à démonstration géométrique évidente, que les cylindres circonscrits parallèlement à une direction donnée à des surfaces homofocales sont homofocaux. Une démonstration analytique est, d'ailleurs, contenue dans les calculs précédents. J'ai indiqué comment on formerait l'équation réduite du cylindre circonscrit à E de sommet $\alpha\beta\gamma\delta = 0$, et il suffira de remplacer a, b, c par $a - \rho$, $b - \rho$, $c - \rho$ dans le résultat pour constater que les cylindres circonscrits aux surfaces homofocales à E sont homofocaux.

Pour obtenir le lieu du foyer de la projection sur le plan des xy, je remarque que les courbes que l'on projette ne sont autre chose que les sections des surfaces

$$\frac{x^2}{a-\rho} + \frac{y^2}{b-\rho} + \frac{z^2}{c-\rho} - 1 = 0,$$

par leur plan polaire relatif à A

$$\frac{\alpha x}{a-\rho} + \frac{\beta y}{b-\rho} + \frac{\gamma z}{\rho-\rho} - 1 = 0.$$

En coordonnées tangentielles, il s'agit de la section de

$$(a-\rho)u^2 + (b-\rho)v^2 + (c-\rho)w^2 - p^2 = 0$$

par un plan de coordonnées

$$\frac{\alpha}{a-\rho}, \quad \frac{\beta}{b-\rho}, \quad \frac{\gamma}{c-\rho}, \quad -1.$$

L'équation de la section plane qui est corrélative de celle du cône circonscrit en coordonnées ponctuelles s'écrit

$$(7) \quad \begin{cases} \mu[(a-\rho)u^2 + (b-\rho)v^2 + (c-\rho)w^2 - p^2] \\ \qquad\qquad - (u\alpha + v\beta + w\gamma + p)^2 = 0, \\ \mu = \dfrac{\alpha^2}{a-\rho} + \dfrac{\beta^2}{b-\rho} + \dfrac{\gamma^2}{c-\rho} - 1. \end{cases}$$

Le point à l'infini dans la direction Oz a pour équation

$$(8) \qquad w = 0.$$

Les équations (7) et (8), prises ensemble, définissent le cylindre vertical projetant la courbe. Si l'on fait $w = 0$ dans l'équation (7), elle représentera une courbe du plan des xy qui sera la projection cherchée. On est donc ramené à chercher le lieu des foyers de

$$(9) \qquad \mu[(a-\rho)u^2+(b-\rho)v^2-p^2]-(u\alpha+v\beta+p)^2=0.$$

Si, entre cette équation et

$$ux+vy+p=0,$$

j'élimine p, j'aurai l'équation aux directions angulaires des tangentes menées du point xy

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mu[(a-\rho)u^2+(b-\rho)v^2-(ux+vy)^2] \\ &\qquad -[u(x-\alpha)+v(y-\beta)]^2=0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation doit être vérifiée pour $u=1$, $v=i$ et pour $u=1$, $v=-i$ si xy est foyer. Cela revient à dire que, si l'on fait $u=1$, $v=i$ dans l'équation (10), on n'aura plus qu'à égaler séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire et éliminer ρ entre ces deux équations.

On a d'abord

$$\mu[a-\rho-b+\rho-(x+yi)^2]-[x-\alpha+i(y-\beta)]^2=0,$$

d'où

$$-\mu(x^2-y^2-a+b)-(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0,$$
$$\mu xy+(x-\alpha)(y-\beta)=0.$$

L'équation du lieu est

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(x^2+y^2-a+b)(x-\alpha)(y-\beta) \\ &\qquad -xy[(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2]=0. \end{aligned} \right.$$

Les termes du quatrième degré disparaissent et, si l'on

transporte l'origine au point double $\alpha\beta$, on a

$$[(x+\alpha)^2-(y+\beta)^2-a+b]xy \\ -(x+\alpha)(y+\beta)(x^2-y^2)=0.$$

Développant,

$$(\beta x-\alpha y)(x^2+y^2)+\alpha\beta(x^2+y^2)-2hxy=0,$$
$$h=-\alpha^2+\beta^2+a-b.$$

On a une cubique circulaire ayant à l'origine un point double par lequel les deux tangentes sont rectangulaires.

Si l'on passe aux coordonnées polaires en posant

$$x=\rho\cos\omega,\quad \alpha=r\cos\varphi,\quad \alpha\beta=-m\sin\psi,$$
$$y=\rho\sin\omega,\quad \beta=r\sin\varphi,\quad h=\ \ m\cos\psi,$$

on obtient

$$\rho=\frac{m}{r}\,\frac{\sin(\psi-2\omega)}{\sin(\varphi-\omega)}.$$

Si l'on pose $\frac{m}{r}=a$ et que l'on fasse tourner l'axe polaire d'un angle facile à déterminer, on obtient l'équation connue de la strophoïde oblique

$$\rho=\frac{a\sin(\theta-2\omega)}{\sin(\theta-\omega)}.$$

ERRATA.

Page 348, ligne 20, *au lieu de* sommets, *lisez* points limites.

Page 348, *remplacer les huit dernières lignes par* transformant la figure par inversion avec le point A pour pôle, ce qui transforme les trois cercles donnés en trois droites.

Page 406, ligne 20, *au lieu de* deux tangentes fixes, *lisez* deux autres tangentes aux deux coniques fixes.

Page 406, ligne 27, *au lieu de* deux points fixes, *lisez* deux autres points d'intersection des deux coniques fixes.

Page 420, lignes 3 et 4 en remontant, *au lieu de* deux, *lisez* quatre.

Page 421, ligne 3 en remontant, *au lieu de* plan, *lisez* centre.

SUR L'INTERSECTION D'UN TORE ET D'UNE QUADRIQUE;

PAR M. S. MANGEOT,
Docteur ès Sciences,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Troyes.

Je me propose de résoudre la question suivante :

Quelles sont les quadriques qui coupent le tore suivant deux courbes sphériques? Construire ces deux courbes.

Soient O le centre du tore, Oz son axe de révolution, Ox, Oy deux axes rectangulaires de son équateur, r le rayon de son cercle générateur, et l la distance du centre de ce cercle à Oz. Rapporté aux droites Ox, Oy, Oz, le tore est défini par l'équation

$$(x^2+y^2+z^2+l^2-r^2)^2 = 4l^2(x^2+y^2),$$

que l'on peut écrire de la manière suivante

$$(x^2+y^2+z^2+\lambda)^2 = V,$$

en posant

$$\begin{aligned} V = \lambda^2 + 2(x^2+y^2+z^2)\lambda - 2(l^2-r^2)(x^2+y^2+z^2) \\ + 4l^2(x^2+y^2) - (l^2-r^2)^2 \end{aligned}$$

et désignant par λ une constante arbitraire. En vertu d'un théorème de M. Darboux sur les surfaces cyclides ([1]), les quadriques qui coupent le tore suivant deux courbes sphériques seront toutes celles qui sont circonscrites aux quadriques V correspondant à l'équa-

([1]) *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques.* Paris, J.-B Baillière; 1873.

tion $V = 0$. Je vais montrer que les quadriques V ne sont autres que celles qui se raccordent avec le tore. Soit Σ une de celles-ci : la courbe de raccordement est du quatrième ordre. Tout plan P mené par Oz coupe la quadrique Σ suivant une conique G, le tore suivant deux cercles C, C', et les deux sections doivent se toucher en quatre points. Donc G est bitangente à chacun des deux cercles C, C', et a pour axe la droite Oz. Dès lors Oz est un axe de la quadrique Σ, et la conique G a un sommet fixe sur Oz : quand le plan P tourne autour de Oz, cette conique reste égale à elle-même. On conclut de là que Σ est une quadrique de révolution, engendrée par la rotation, autour de l'axe du tore, d'une conique bitangente à chacun des deux cercles de sa méridienne. Or, pour toute valeur de λ, l'équation $V = 0$ représente une quadrique remplissant ces conditions.

Je suis ainsi conduit au résultat qui suit :

Pour qu'un tore et une quadrique S *se coupent suivant deux courbes sphériques, il faut et il suffit que l'on puisse inscrire dans les deux surfaces une même quadrique* Σ.

Soit

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

l'équation du plan H de raccordement des deux quadriques S et Σ. L'équation de S a la forme

$$V = (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)^2$$

et les deux sphères sur lesquelles se trouve l'intersection ont pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \pm (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) = 0.$$

Les centres des deux sphères sont différents, si, comme nous pouvons l'admettre, la quadrique sécante

S n'est pas de révolution autour de l'axe du tore. Ces deux points sont sur la droite $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$. Le plan radical des deux sphères est le plan H. Les quatre points de rencontre de ce plan H avec les deux cercles de contact du tore et de Σ sont communs au tore et à S, et appartiennent à l'une ou l'autre des deux courbes sphériques : ils sont donc sur le cercle commun aux deux sphères. J'ajoute que, Σ étant de révolution autour de Oz, la quadrique S admet nécessairement comme plan de symétrie le plan mené par Oz perpendiculairement à H, plan qui contiendra les centres des deux sphères.

En rassemblant ces résultats, je puis énoncer le théorème suivant :

Quand un tore et une quadrique S *sont inscrits dans une même quadrique* Σ, *leur intersection* Γ *peut être placée sur deux sphères. Les centres des deux sphères sont symétriques l'un de l'autre par rapport au centre du tore : ils sont situés sur la perpendiculaire menée par ce point au plan* H *de la courbe de contact des deux quadriques. Le cercle commun aux deux sphères est l'intersection* D *du plan* H *avec la sphère qui contient les deux parallèles de contact du tore et de la quadrique* Σ. *La projection de la courbe* Γ *sur le plan méridien du tore perpendiculaire au plan* H *est formée de deux coniques.*

Pour construire la courbe Γ, il suffit de savoir construire les deux sphères précédentes, puisque alors on sera ramené à déterminer l'intersection d'une sphère et d'un tore.

Si l'on connaît, en dehors du plan H, un point m de la courbe Γ, les deux sphères seront connues; car on connaîtra un cercle D et un point m de l'une des sphères

et, par suite, un cercle D de l'autre sphère avec son centre.

Mais on peut obtenir les deux sphères sans supposer connu un point de Γ. Je vais, en effet, donner un moyen de construire leurs centres, ce qui suffira à les déterminer, sachant qu'elles contiennent le cercle D.

Pour définir la méridienne G de Σ, que je suppose d'abord être un ellipsoïde ou un hyperboloïde, on donne l'un de ses axes $2a$, $2c$: l'autre est déterminé par la relation

$$a^2 = c^2 + \frac{c^2 l^2}{c^2 - r^2},$$

en vertu de laquelle cette conique est en contact avec les deux cercles C, C′. Prenons à volonté un point M sur la quadrique S, et rapportons toutes les surfaces aux trois axes Ox, Oy, Oz, en faisant passer le plan xOz par M. L'équation de Σ est

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

celle de S est

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 - K(\lambda' x + \mu' y + \nu' z + h)^2 = 0,$$

λ', μ', ν' étant les cosinus directeurs de la normale au plan H, et enfin celle des deux sphères sera

$$(x^2+y^2+z^2+r^2-l^2-2c^2)^2 - \frac{4\,K a^2 c^2 l^2}{c^2-a^2}(\lambda' x + \mu' y + \nu' z + h)^2 = 0.$$

Prenons comme inconnue la distance ρ du centre de l'une d'elles au centre du tore : on a

$$\rho^2 = \frac{K a^2 c^2 l^2}{c^2 - a^2},$$

et l'on est ramené à déterminer K. Pour cela, construi-

sons la polaire de M par rapport à la méridienne G située dans le plan xOz, et projetons M en N sur cette droite; puis prolongeons MN jusqu'à sa rencontre en R avec Oz. On aura, en désignant par x_0, o, z_0 les coordonnées de M,

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = \pm \frac{\text{MN} \times \text{MR}}{a^2}.$$

D'un autre côté, d étant la distance du point M au plan H, on a

$$\lambda' x_0 + \nu' z_0 + h = \pm d.$$

La comparaison de ces deux égalités donne

$$\text{K} = \pm \frac{\text{MN} \times \text{MR}}{a^2 d^2};$$

on aura donc, pour construire ρ, la formule

$$\rho^2 = \pm \frac{(c^2 - r^2) \times \text{MN} \times \text{MR}}{d^2};$$

les longueurs qui figurent au second membre sont toutes connues.

Il est bien évident que la construction que je viens d'indiquer deviendrait inutile si l'on connaissait la section principale A de la quadrique S dont le plan est perpendiculaire au plan H; car les huit points de rencontre de cette conique avec les deux cercles du tore situés dans son plan devant appartenir aux deux sphères sont quatre à quatre sur deux grands cercles de ces sphères, et, connaissant les huit points, on connaîtrait ainsi ces deux grands cercles. On serait dans ce cas si S était un cône de sommet donné, puisque alors A serait formée des deux tangentes menées de ce sommet à la méridienne G dont le plan contient ce point : en sorte que, quand une quadrique est inscrite dans un tore, tout cône ou cylindre circonscrit à la quadrique coupe le

tore suivant une courbe située sur deux sphères dont la construction est très simple.

La propriété que je viens d'indiquer au sujet de la conique A donne lieu à cette proposition de Géométrie plane :

Quand deux coniques A *et* B *sont bitangentes, si l'on coupe l'une d'elles,* A, *par deux cercles égaux* C, C′, *bitangents à l'autre, les huit points de rencontre sont quatre à quatre sur deux autres cercles, dont les centres sont symétriques par rapport au centre de* B, *et dont les points communs sont ceux où la droite des contacts de* A *et* B *rencontre le cercle passant par les quatre points de contact de* B *avec les deux cercles* C *et* C′.

Cas particuliers. — J'indique ce que deviennent les conclusions qui précèdent dans les trois cas où la quadrique Σ n'est ni un ellipsoïde ni un hyperboloïde.

1° Σ *est un cône.* — On a ici cette proposition :

Si l'on considère le cône de révolution qui a pour méridienne les tangentes doubles intérieures de la méridienne d'un tore et même axe que lui, toute quadrique S *circonscrite à ce cône coupe le tore suivant deux courbes sphériques.*

La formule qui donne ρ est, dans ce cas,

$$\rho = \frac{l}{d}\sqrt{uv},$$

en appelant u, v les distances d'un point quelconque de S aux deux génératrices du cône dont le plan passe par ce point.

2° Σ *est formée des deux plans limites du tore.* — Les quadriques S sont alors des cylindres ; donc :

Les cylindres elliptiques tangents aux deux plans

limites d'un tore le coupent suivant deux courbes sphériques.

La formule faisant connaître ρ est la même que la précédente, u et v désignant ici les distances d'un point quelconque du cylindre aux deux plans limites.

3° Σ *est un cylindre.* — Ce cylindre a pour équation $x^2+y^2=0$, et les surfaces S sont les cônes définis par la relation

$$x^2+y^2=(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)^2.$$

Donc :

Quand un cône a son sommet sur l'axe d'un tore, et que sa base, dans le plan de l'équateur du tore, est une conique ayant un foyer au centre du tore, l'intersection du cône et du tore est formée de deux courbes sphériques.

Les droites joignant le sommet du cône aux deux sommets de la base situés sur l'axe focal coupent le tore en huit points appartenant quatre à quatre à deux cercles autres que ceux de la méridienne : ce sont les grands cercles des deux sphères sur lesquelles se trouve l'intersection.

Ces trois cas particuliers correspondent respectivement aux trois valeurs suivantes de λ :

$$r^2-l^2,\quad -(r^2+l^2),\quad l^2-r^2.$$

Remarques. — La question que je viens de traiter donne une solution de ce problème de Géométrie descriptive (¹) :

(¹) Et aussi de celui-ci : *On donne un point, une droite, un cercle, et une conique bitangente au cercle définie par un axe. Construire géométriquement les points de rencontre du cercle avec une conique passant par le point donné et ayant un double contact, sur la droite donnée, avec la conique donnée.*

Construire l'intersection d'un tore et d'une quadrique passant par un point donné et se raccordant, dans un plan donné, avec une quadrique de révolution circonscrite au tore, définie par un de ses sommets.

Les considérations qui précèdent conduisent encore à ces deux propositions, faciles à vérifier :

Si l'on coupe un tore par deux sphères quelconques dont les centres soient symétriques par rapport au centre du tore, les deux courbes d'intersection peuvent être placées sur une même quadrique.

Toute quadrique passant par l'intersection d'une sphère et d'un tore rencontre le tore suivant une seconde courbe sphérique.

En prenant les traces de toutes ces surfaces sur un plan méridien du tore, on obtiendrait des propositions correspondantes de Géométrie plane : on les aperçoit aisément, et je me dispenserai d'en donner l'énoncé.

SUR UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE SÉRIES;

PAR M. M. D'OCAGNE,

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Ayant eu tout récemment l'occasion de revenir sur l'étude des séries récurrentes dont je me suis précédemment occupé [1], j'ai remarqué dans la première de mes Notes sur ce sujet certaine inadvertance qui fausse divers résultats énoncés. J'expliquerai plus loin en quoi a

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. III, p. 65 (1884) et t. IX, p. 93 (1890).

consisté cette inadvertance. L'objet de la présente Note est de rectifier sur ce point mon étude antérieure. La matière de cette Note doit être substituée aux nos 35 et 36 (§ XIV) de ma *Théorie élémentaire des séries récurrentes* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. III, p. 21 à 23).

1. Les séries que j'ai en vue répondent à la définition suivante : chaque terme est lié à tous ceux qui le précèdent par la formule

$$(1) \qquad U_n = a_0 U_{n-1} + a_1 U_{n-2} + \ldots + a_{n-2} U_1 + a_{n-1} U_0,$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, \ldots$ étant les termes successifs d'une progression arithmétique de raison r.

J'ai fait voir, à l'endroit cité, que les termes de cette série formaient une suite récurrente de la manière suivante :

De l'expression (1) de U_n, retranchons l'expression analogue de U_{n-1}. Il vient

$$U_n - U_{n-1} = a_0 U_{n-1} + r(U_{n-2} + U_{n-3} + \ldots + U_1 + U_0).$$

De même

$$U_{n-1} - U_{n-2} = a_0 U_{n-2} + r(U_{n-3} + \ldots + U_1 + U_0).$$

Par soustraction de ces deux dernières égalités, on a

$$U_n - 2U_{n-1} + U_{n-2} = a_0 U_{n-1} - (a_0 - r) U_{n-2}$$

ou

$$(2) \qquad U_n = (a_0 + 2) U_{n-1} - (a_0 + 1 - r) U_{n-2}$$

C'est la formule (34) de ma première Note. L'inadvertance commise à l'endroit cité a consisté à utiliser cette formule à partir de $n = 2$, alors qu'elle n'est en réalité démontrée et que de fait elle n'est vraie qu'à partir de $n = 3$.

Il faut donc, pour appliquer les formules que j'ai fait

connaître relativement aux suites récurrentes, poser

$$U_1 = U'_0, \qquad U_2 = U'_1, \qquad \ldots, \qquad U_n = U'_{n-1}, \qquad \ldots.$$

C'est la suite des U', prise avec les termes initiaux U'_0 et U'_1, qui est récurrente.

La formule (12) de ma première Note ([1]) donne dès lors

$$U'_n = U'_1 u_n - (a_0 + 1 - r) U'_0 u_{n-1},$$

les u étant les termes de la suite récurrente *fondamentale* définie par l'échelle de récurrence (2) avec les termes initiaux

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1.$$

Si l'on remplace U'_n, U'_1 et U'_0 par leurs valeurs prises dans la première suite, on a

$$(3) \quad U_n = U_0[(a_0^2 + a_0 + r) u_n - (a_0^2 + a_0 - r a_0) u_{n-1}].$$

Il suffit ensuite, au moyen de la formule (8) de ma première Note, d'exprimer u_n et u_{n-1} en fonction de $(a_0 + 2)$ et de $(a_0 + 1 - r)$ pour avoir l'expression explicite de U_n.

Mais nous laisserons de côté ces calculs pour reprendre avec les formules correctes qui viennent d'être établies ici l'étude de la convergence et de la sommation des séries considérées.

([1]) *Nouvelles Annales*, 3e série, t. III, p. 71. Cette formule se trouve généralisée pour les suites récurrentes linéaires d'ordre quelconque dans le même Mémoire (p. 80). J'ai établi depuis la formule généralisée par un procédé beaucoup plus simple dans la seconde des Notes citées plus haut. La notion de *suite fondamentale*, que j'ai envisagée pour la première fois dans mon Mémoire de 1883, et la formule en question ont été introduites par Ed. Lucas dans sa *Théorie des nombres* (p. 303). Il faut, pour éviter toute confusion, remarquer qu'à l'endroit cité Lucas a interverti les rôles joués dans mon Mémoire par les lettres u et U.

2. Ayant écrit la série sous la forme

$$\begin{aligned} S &= U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots \\ &= U_0 + U'_0 + U'_1 + U'_2 + \ldots \\ &= U_0 + S', \end{aligned}$$

nous n'aurons qu'à nous occuper de la série S'. Cette série est récurrente en vertu de la formule (2). Elle sera convergente si les racines de son équation génératrice

$$(4) \qquad x^2 - (a_0 + 2)x + (a_0 + 1 - r) = 0$$

ont un module inférieur à l'unité.

Si cette condition est remplie, on aura la somme S' de la série par application de la formule (19) de ma première Note, généralisée par la formule (6) de la seconde ([1]). On obtient ainsi

$$\begin{aligned} S' &= \frac{(1 - a_0 - 2)U'_0 + U'_1}{1 - (a_0 + 2) + (a_0 + 1 - r)} \\ &= \frac{-(a_0 + 1)a_0 U_0 + (a_0^2 + a_0 + r)U_0}{-r} \\ &= -U_0. \end{aligned}$$

Il vient, par suite, pour la somme de la série proposée

$$S = U_0 + S' = U_0 - U_0 = 0.$$

De là ce curieux théorème :

Lorsqu'une série de la forme considérée est convergente, sa somme est nulle quels que soient U_0, a_0 *et* r.

([1]) *Nouvelles Annales*, 3ᵉ série, t. IX, p. 97. Il est à remarquer que ces deux formules concordent parfaitement, car il ne faut pas perdre de vue que, la formule (19) de ma première Note ne faisant connaître que $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots$, il faut, pour retomber sur le cas particulier de la formule (6) de la seconde, ajouter U_0 au second membre, ce qui donne

$$U_0 + \frac{U_1 + bU_0}{1 - (a + b)} = \frac{(1 - a)U_0 + U_1}{1 - (a + b)}.$$

Ce théorème est susceptible d'une importante généralisation, que j'ai récemment communiquée à l'Académie des Sciences (¹) et dont la démonstration paraîtra prochainement.

3. Voici un exemple qui aura l'avantage de nous fournir une vérification du théorème obtenu.

Prenons

$$U_0 = 1, \qquad a_0 = -1, \qquad r = -\tfrac{1}{2}.$$

L'échelle de récurrence (2) est alors

$$U_n = U_{n-1} - \frac{U_{n-2}}{2} \qquad (n \geqq 3).$$

Son équation génératrice

$$x^2 - x + \tfrac{1}{2} = 0$$

a pour racines

$$x' = \frac{-1+i}{2}, \qquad x'' = \frac{-1-i}{2},$$

dont le module $\rho = \sqrt{\frac{1}{2}}$ est inférieur à 1. La série est donc convergente et sa somme, d'après le théorème ci-dessus démontré, doit être nulle.

Pour le vérifier, remarquons que, si nous prenons les trois formules

$$U_n = U_{n-1} - \frac{U_{n-2}}{2},$$

$$U_{n-1} = U_{n-2} - \frac{U_{n-3}}{2},$$

$$U_{n-2} = U_{n-3} - \frac{U_{n-4}}{2},$$

et si nous les ajoutons membre à membre, après avoir multiplié la dernière par $\frac{1}{2}$, nous avons

$$U_n = -\frac{U_{n-4}}{4}.$$

(¹) *Comptes rendus*, t. CXV, p. 790.

Ainsi les termes pris de 4 en 4 respectivement à partir de U_1, de U_2, de U_3 et de U_4, forment des progressions géométriques de raison $-\frac{1}{4}$. Or le calcul direct donne

$$U_1 = -1, \qquad U_2 = -\frac{1}{2}, \qquad U_3 = 0, \qquad U_4 = \frac{1}{4}.$$

Si donc s est la somme de la progression géométrique de premier terme -1 et de raison $-\frac{1}{4}$, on a

$$\begin{aligned} S &= U_0 + s + \frac{s}{2} - \frac{s}{4} \\ &= 1 + \frac{5s}{4}. \end{aligned}$$

Mais

$$s = \frac{-1}{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{4}{5},$$

par suite

$$S = 1 - 1 = 0,$$

et la vérification est faite.

4. Pour terminer cette Note, je donnerai une démonstration nouvelle de la formule de sommation des séries récurrentes que j'y ai employée.

Soit donc la série

$$S = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots \text{ ad inf.}$$

supposée convergente et telle que

$$(\alpha) \qquad U_{n+p} = a_0 U_{n+p-1} + a_1 U_{n+p-2} + \ldots + a_{p-1} U_n.$$

La somme cherchée, étant évidemment une fonction linéaire des p termes initiaux $U_0, U_1, \ldots, U_{p-1}$, pourra toujours se mettre sous la forme

$$(\beta) \qquad S = \frac{U_{p-1} + b_1 U_{p-2} + b_2 U_{p-3} + \ldots + b_{p-1} U_0}{b_p}.$$

Or, si nous représentons par S_n la somme de la

série lorsqu'on la fait commencer au terme U_n, nous avons

$$S_n = U_n + S_{n+1}$$

ou, en vertu de la formule (β),

$$\frac{U_{n+p-1} + b_1 U_{n+p-2} + \ldots + b_{p-1} U_n}{b_p} = U_n + \frac{U_{n+p} + b_1 U_{n+p-1} + \ldots + b_{p-1} U_{n+1}}{b_p},$$

c'est-à-dire

$$U_{n+p} = (1 - b_1) U_{n+p-1} + (b_1 - b_2) U_{n+p-2} + \ldots + (b_{p-1} - b_p) U_n.$$

Cette relation devant avoir lieu, quel que soit n, doit être identique à (α). Donc

$$1 - b_1 = a_0, \qquad b_1 - b_2 = a_1, \qquad \ldots, \qquad b_{p-1} - b_p = a_{p-1},$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 - a_0, \\ b_2 &= 1 - (a_0 + a_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_p &= 1 - (a_0 + a_1 + \ldots + a_{p-1}). \end{aligned}$$

On n'a plus qu'à transporter ces valeurs de b_1, b_2, ..., b_p dans (β) pour avoir la formule que nous avons appliquée plus haut.

NOTE SUR LE CENTRE DE COURBURE DES PODAIRES ET ANTIPODAIRES;

PAR M. M. D'OCAGNE.

Les quelques remarques qui suivent ont été rédigées à l'occasion d'une Note de M. Henri Pilleux, récemment parue dans les *Nouvelles Annales*, p. 384.

L'auteur de cette Note a eu la très heureuse idée de lier le centre de courbure en un point d'une courbe au centre de courbure correspondant de sa podaire par l'intermédiaire de la tangente à la podaire de la développée de la courbe.

Soient, en effet,

O le pôle;

M le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en P à la courbe (P);

I celui de la perpendiculaire abaissée du même point sur la normale en P.

On sait que MI est la normale à la podaire. Or, le point I étant le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente à la développée de (P) décrit la podaire de cette développée et, si l'on connaît le point correspondant de cette courbe, c'est-à-dire le centre de courbure γ de la courbe (P), on a, au moyen de la même construction que précédemment, la normale et, par suite, la tangente, au lieu du point I.

Le centre de courbure c de la podaire (M) est le point où MI touche son enveloppe. Il suffit d'établir une liaison géométrique entre ce point et la tangente en I pour le rattacher, d'après la remarque précédente, au centre de courbure de la courbe (P). C'est ce mode de liaison que M. Pilleux a cherché à établir.

Pour cela il a remarqué que le segment MI était constamment vu du point O sous un angle droit et il a, en se fondant sur cette condition, cherché comment le point c où MI touche son enveloppe dépendait des tangentes connues aux courbes décrites par M et par I.

Voici la construction que j'ai donnée en 1883 pour

le même problème (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. II, p. 256) :

Si T *est le point de rencontre des tangentes en* M *et en* I, *les droites* OT *et* O*c* *sont isogonales par rapport à l'angle* MOI (¹).

Le théorème pris sous cette forme a l'avantage de s'appliquer sans aucune modification au cas où l'angle constant OMP, au lieu d'être droit, est quelconque, c'est-à-dire au cas des *podaires inclinées*. tandis que la construction de M. Pilleux se complique un peu dans ce cas.

J'ai, à l'endroit indiqué, obtenu directement le théorème en question; mais il est très facile de le déduire de la propriété du centre instantané de rotation pour le déplacement d'un angle de grandeur constante.

Considérons, en effet, un angle constant BAC dont les côtés AB et AC touchent leurs enveloppes respectivement aux points B et C. Les perpendiculaires élevées en B à AB et en C à AC se coupent au centre instantané de rotation K de la figure, et la normale au lieu de A est la droite KA. Or le cercle circonscrit au triangle ABC, cercle qui a AK pour diamètre, est tangent en A à la tangente au lieu décrit par ce point. Donc, l'angle que fait cette tangente avec AB est égal à l'angle ACB (en d'autres termes, la tangente en A est antiparallèle de BC par rapport à l'angle BAC). Transformant cette propriété par polaires réciproques, par rapport à un cercle de centre O, on obtient précisément le théorème que nous avons en vue.

(¹) Également inclinées sur la bissectrice de cet angle.

SOLUTION D'UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE DONNÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL EN 1887;

PAR M. F. FARJON.

Il s'agit de trouver la condition à laquelle doivent satisfaire deux coniques F et f pour qu'un quadrilatère puisse être à la fois circonscrit à la première et inscrit dans la seconde.

Nous nous servirons des notations de M. Salmon.

Supposons la condition réalisée et soient L, M, N les diagonales du quadrilatère, les quatre côtés seront $L \pm M \pm N$. L'équation générale des coniques inscrites est

$$\Phi = \mu^2 L^2 - \mu(L^2 + M^2 - N^2) + M^2 = 0 \text{ [1]}$$

et celle des coniques circonscrites

$$\begin{aligned}\varphi = &(L + M + N)(L + M - N)\\ &- \nu(L - M + N)(L - M - N) = 0.\end{aligned}$$

Si ces deux équations comprennent les deux courbes F et f, rapportées au triangle de référence LMN, en égalant à zéro les deux discriminants de $f - \lambda F$ et de $\varphi - \lambda\Phi$, on obtiendra deux équations en λ qui devront avoir les mêmes racines.

Soient Δ_1, Δ'_1, Θ_1, Θ'_1 les invariants du système $\Phi\varphi$, Δ, Δ', Θ, Θ' ceux du système Ff, on a

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= -\mu^2(\mu - 1)^2,\\ \Delta'_1 &= -4\nu(\nu - 1),\\ \Theta_1 &= -2\mu(\mu - 1)^2(\nu - 1),\\ \Theta'_1 &= -(\mu - 1)^2(\nu - 1)^2 - 4\mu\nu;\end{aligned}$$

[1] SALMON, trad. VAUCHERET, *Sect. con.*, § 287.

par conséquent

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\theta}{\Delta} = \dfrac{2(\nu-1)}{\mu}, \\ \dfrac{\theta'}{\Delta} = \dfrac{(\mu-1)^2(\nu-1)^2+4\mu\nu}{\mu^2(\mu-1)^2}, \\ \dfrac{\Delta'}{\Delta} = \dfrac{4\nu(\nu-1)}{\mu^2(\mu-1)^2} \end{cases}$$

et en éliminant entre ces trois relations les paramètres μ et ν, on aura la condition cherchée.

On tire de la première

$$\mu = \frac{2(\nu-1)\Delta}{\theta},$$

de la troisième

$$(\mu-1)^2 = \frac{\nu\theta^2}{\Delta\Delta'(\nu-1)};$$

substituant dans la seconde, on trouve finalement

$$(2)\qquad 4\Delta\theta\theta' = \theta^3 + 8\Delta^2\Delta'.$$

Cette condition est évidemment nécessaire, puisque, si elle n'était pas remplie, les trois relations (1) seraient incompatibles. Je dis de plus qu'elle est suffisante.

D'un point A pris sur f menons les deux tangentes à F, lesquelles rencontrent f aux points B et C. De ces points menons deux nouvelles tangentes à F, lesquelles se coupent en D; il faut prouver que, si la condition (2) est remplie, le point D est aussi sur f.

Rapportons F et f au triangle de référence LMN formé par les diagonales du quadrilatère ABCD, F prendra la forme Φ et, pour identifier f et φ, on aura cinq conditions, qui se réduisent à deux, les deux courbes ayant déjà les trois points A, B, C communs. L'équation (2) qui existe, par hypothèse, pour les deux systèmes $\Phi\varphi$ Φf permet de satisfaire à une quatrième condition. La cinquième déterminera la valeur de ν. C. Q. F. D.

Remarquons que le point A est un point quelconque de f, d'où il suit que, lorsque la condition (2) est remplie, il existe une infinité de quadrilatères circonscrits à F et inscrits à f. Poncelet a depuis longtemps établi cette propriété pour un polygone quelconque.

Application. — L'ellipse

$$F = a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$$

et le cercle

$$f = (x-c)^2 + y^2 - 2(a^2+e^2) = 0 \ (^1).$$

On a

$$\Delta = -a^4b^4, \qquad \Delta' = -2(a^2+e^2),$$
$$\Theta = -4a^4b^2, \qquad \Theta' = -2a^2b^2 - 4a^4 + b^4,$$

et la condition (2) est vérifiée.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Méray.

Les propositions analytiques par lesquelles débute l'article (p. 474) se trouvaient en majeure partie déjà, quoique dans une forme différente, dans un *Mémoire sur la théorie algébrique des formes quadratiques,* publié par M. Darboux dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (2e série, t. XIX; 1874). L'auteur, qui l'ignorait, doit en informer le lecteur et l'inviter surtout à consulter aussi cet important travail.

---

(1) Cf. *Nouvelles Annales,* année 1888, p. 348.

NOTICE SUR C. GÉRONO.

Gérono vient de mourir; c'est le 7 novembre que nous l'avons conduit à sa dernière demeure. M. Laisant a prononcé sur sa tombe des paroles éloquentes qui ont ému toute l'assistance, tant elles étaient en harmonie avec les sentiments intimes de tous ceux qui étaient venus rendre, par leur présence, un dernier hommage au maître vénéré. Nous regrettons de ne pouvoir reproduire cette touchante improvisation, qui méritait d'être recueillie et qui reflétait si bien la reconnaissance de l'élève et la tendresse de l'ami.

Gérono fut à la fois un homme de bien, un professeur émérite, un savant modeste et distingué. Son zèle incomparable, son caractère plein de droiture, sa sollicitude si bienveillante malgré quelque apparence de rudesse, son grand amour du devoir lui avaient concilié durant sa vie l'estime publique, et l'on peut hautement affirmer qu'il laisse après lui d'unanimes regrets.

Il appartenait à une noble famille génoise que ses opinions démocratiques avaient obligée de quitter successivement l'Italie et la Hollande pour se fixer définitivement à Paris, où Gérono naquit le 8 nivôse de l'an VIII. Il fit de brillantes études au Lycée Louis-le-Grand, et remporta en 1815, au Concours général, le premier prix de Mathématiques élémentaires, tandis que son condisciple, Victor Hugo, obtenait au même concours le cinquième accessit de Physique. On raconte que, la veille de la distribution des prix, lorsque le Proviseur fit connaître leur succès à ces deux élèves, que devait unir désormais une étroite et inaltérable amitié,

Victor Hugo se jeta dans les bras de son camarade en s'écriant : « Je serai le Milton de la Littérature et tu » seras le Newton de la Science ».

A peine sorti du collège, notre lauréat fut envoyé comme professeur, d'abord à Tulle, puis à Vendôme, qu'il quitta à la suite d'un duel d'ailleurs fort honorable. C'est alors que le baron Reynaud le fit nommer professeur à l'École des Pages, à Versailles, où il enseigna les Mathématiques et la Physique, pendant plus de cinq ans, du 1er juin 1825 au 1er septembre 1830, date de la suppression de la Maison des Pages. Un professeur d'un tel mérite ne pouvait être oublié; on l'envoya comme principal au collège de Lorient, d'où il fut appelé un peu plus tard à Paris, en qualité de professeur à Sainte-Barbe. Dès lors, Gérono ne quitta plus Paris, où il donna des leçons dans la plupart des établissements d'instruction publique et où il vécut heureux, grâce aux soins affectueux de M. et Mme Gaillard.

Jamais carrière de professeur ne fut plus pleinement et plus dignement remplie. Gérono a prodigué ses soins à plus de soixante générations d'élèves, dont beaucoup sont restés ses amis et qui tous emportaient une profonde estime pour son caractère et son talent. Quelle preuve plus caractéristique de l'attachement qu'il inspirait à ses élèves, que la cérémonie touchante à laquelle donna lieu sa décoration? On lisait, le 18 juillet 1884, dans la plupart des journaux parisiens : « Hier, M. le général Campenon, Ministre de la Guerre, et M. Anatole de la Forge député de la Seine, sont allés remettre à leur vieux professeur, M. Gérono, la Croix de la Légion d'honneur. M. le recteur Gréard, M. Dubief, directeur de Sainte-Barbe, l'amiral Duperré, M. Laisant, député de Nantes, M. Vaseilles, directeur des études à Sainte-Barbe, et une foule d'anciens élèves du maître ont tenu

à offrir leurs respectueux compliments à ce vétéran de la Science. »

Pendant les années 1822 et 1823, Gérono entretint une correspondance assez suivie, à propos de quelques passages de la *Géométrie de position*, avec le général Carnot, alors exilé à Magdebourg. « C'est faire faire de véritables progrès à la Science », lui écrivait Carnot le 15 mai 1823 « que de généraliser, comme vous le faites, les propositions, pourvu qu'alors l'énoncé n'en devienne pas trop compliqué; autrement, il vaudrait mieux considérer ces propositions comme des corollaires de celles qui sont plus simples ».

Un peu plus tard, en 1825, Gérono eut la bonne fortune de patronner, dans la capitale, le jeune Sturm, qui arrivait de Genève, muni d'une lettre de recommandation de son savant maître Lhuilier. « Cette lettre », écrivait Lhuilier à Gérono, « vous sera remise par l'un de mès ci-devant disciples, M. Sturm, qui vous est bien connu par les beaux Mémoires qu'il a insérés dans les *Annales* de M. Gergonne, qui ont aussi acquis un nouveau mérite par les différents Mémoires que vous y avez insérés, et qui sont une preuve de votre attachement à la Science et des progrès que vous lui faites faire. Vous avez avec M. Sturm une coïncidence de goûts qui ne tardera pas à vous attacher l'un à l'autre ... ». Et en effet, Sturm devint l'ami de Gérono dont il se complaisait sans cesse à rappeler l'accueil empressé et cordial.

L'année 1842 est une date mémorable dans la carrière scientifique de Gérono; c'est alors que, en collaboration avec le regretté O. Terquem, il fonda les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* qu'il dirigea jusqu'en mai 1887, et qui rendent, depuis un demi-siècle, des services éclatants à l'Enseignement et à la Science. C'est

dans ce Recueil et dans les *Annales de Gergonne* ([1]) que se trouvent tous les travaux scientifiques de notre savant prédécesseur. Gérono a écrit, en outre, à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales, plusieurs Ouvrages qui se recommandent par une clarté et une précision peu communes; ce sont : un *Traité de Statique*, un *Traité de Trigonométrie* et un *Traité de Géométrie analytique* faits en collaboration avec M. Delisle, et un *Traité de Géométrie descriptive*, fait en collaboration avec M. Cassanac.

Pour ne rien omettre, nous devons signaler encore divers travaux littéraires, consistant principalement dans quelques articles de critique insérés dans le Journal *le Corsaire* sous la rubrique : *Lettres à la postérité*. Voici le commencement de la première de ces Lettres; cet extrait suffira pour donner une idée de cette critique humoristique :

« M. le rédacteur, je ne vous écris point pour vous expliquer les Œuvres de Victor Hugo; M. Victor *se sent, il ne se raisonne pas*. Ce n'est pas non plus pour flagorner le baron Dupin; ce grand citoyen, qui s'occupe de tout, saurait, s'il le fallait, faire lui-même son éloge. Ce n'est point enfin dans l'intention de voter des encouragements à l'industrie nationale, car les industriels ont beau dire que plus ils font de *machines à se passer d'ouvriers*, plus il leur faut d'ouvriers pour faire aller ces machines; je leur soutiens, moi, avec messieurs de la droite, que si les moulins n'étaient pas faits, les ânes n'iraient pas au moulin et que ce serait nous qui ferions leur ouvrage...

G.,

professeur ennuyé des Académies de etc., etc. »

([1]) Nous publierons prochainement une liste complète des Mémoires de M. Gérono.

Gérono ne se désintéressa jamais de la politique; il a toujours rempli religieusement ses devoirs de citoyen. Il y a dans sa vie un trait héroïque : C'était aux journées de juin 1848. Gérono remplissait les fonctions de maire du XIIe arrondissement. Tout à coup, on vient lui dire qu'un notable commerçant du quartier a été enlevé par les insurgés et qu'on va le fusiller sur l'heure. Gérono court à la barricade, il arrive au moment où l'on colle au mur le malheureux otage. Prières, menaces, rien n'y fait. Alors, voyant qu'on met en joue : « Fusillez-moi donc avec lui » s'écrie Gérono, en se précipitant à côté du prisonnier. Tant de courage en impose aux émeutiers, leurs cœurs fléchissent, leurs armes s'abaissent. Gérono, par cet élan sublime, avait sauvé un père de famille et épargné un crime à des égarés.

EUGÈNE ROUCHÉ.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE (1)

(TOME XI, 3e SÉRIE).

A. — Algèbre élémentaire; théorie des équations.

B. — Déterminants; élimination; théorie des formes; quantités complexes.

D. — Théorie des fonctions; séries.

(1) Les indications en caractères gras placées à la suite du numéro d'ordre correspondent à la classification adoptée par le Congrès de Bibliographie mathématique de 1889.

M. — Courbes et surfaces algébriques et transcendantes.

N. — Complexes.

O. — Géométrie infinitésimale et Géométrie cinématique.

P. — Transformations géométriques.

R. — Mécanique.

MÉLANGES.

TABLE DES AUTEURS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE

(TOME XI, 3e SÉRIE).

(On a mis à la droite de chaque nom d'auteur les numéros de la Table précédente auxquels il faut se reporter pour trouver les titres des Mémoires et l'indication des pages correspondantes.)

18028 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

EXERCICES.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1621. La somme des carrés des axes d'une ellipse E, doublement tangente à une ellipse donnée et qui passe par les foyers de cette courbe, est constante quelle que soit cette ellipse E. (MANNHEIM.)

1622. On considère une des coniques du faisceau déterminé par quatre points donnés A, B, C, D, et deux autres points fixes P et Q situés dans le plan de la conique. La droite PC rencontre la conique en C', la droite QD rencontre la même conique en D'. Montrer que la droite C'D' passe par un point fixe, quelle que soit la conique du faisceau. (BARISIEN.)

1623. Les milieux des six cordes d'intersection de deux coniques et le centre des deux coniques sont une même conique. (BARISIEN.)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1574.

On considère tous les points du plan d'une ellipse d'où l'on peut mener à cette courbe deux normales simples et une normale double; on demande le lieu du pôle de la corde qui joint le pied de la normale double au pied d'une normale simple. (CHAMBON.)

SOLUTION

Par M. A. RENON.

Soient α, β, α', β' les coordonnées des pôles des droites qui joignent le pied M de la normale double aux pieds des deux normales simples, l'ellipse étant rapportée à ses axes.

Soient $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ les coordonnées de M. La tangente en M à l'ellipse a pour équation

$$x\frac{\cos\varphi}{a} + y\frac{\sin\varphi}{b} - 1 = 0.$$

Les deux points, dont les coordonnées sont α, β, α', β', devant se trouver sur cette tangente, on a

$$(1) \qquad \alpha\frac{\cos\varphi}{a} + \beta\frac{\sin\varphi}{b} - 1 = 0,$$

$$(2) \qquad \alpha'\frac{\cos\varphi}{a} + \beta'\frac{\sin\varphi}{b} - 1 = 0.$$

Mais, la normale en M étant double, les points (α, β), (α', β') sont deux sommets opposés d'un quadrilatère normal circonscrit et l'on a

$$(3) \qquad \alpha\alpha' = -a^2, \qquad \beta\beta' = -b^2,$$

On obtiendra donc l'équation du lieu en éliminant α', β' et φ entre (1), (2) et (3). Cette élimination donne

$$(b^2x^2 - a^2y^2)^2 = b^2y^2(a^2 + x^2)^2 + a^2x^2(b^2 + y^2)^2 = 0.$$

Ce lieu est donc une courbe du quatrième degré. Elle est tangente à l'ellipse en ses quatre sommets; elle admet pour asymptotes les côtés du rectangle construit sur les axes.

Question 1604.

Démontrer que, si une parabole P *touche les diamètres conjugués égaux d'une ellipse* E, *les cordes communes à l'ellipse et aux cercles osculateurs à cette courbe aux points de contact des tangentes communes à* P *et à* E *passent par un même point; la polaire de ce point par rapport à l'ellipse est tangente à la parabole.* (LEMAIRE.)

SOLUTION

Par M. BARISIEN.

Prenons pour axes de coordonnées les axes de l'ellipse. L'équation des diamètres conjugués égaux de l'ellipse est

$b^2x^2 - a^2y^2 \pm 0$; celle d'une conique qui leur est tangente peut s'écrire

$$\lambda(b^2x^2 - a^2y^2) + (ux + vy - 1)^2 = 0,$$

$ux + vy - 1 = 0$ représentant la droite qui joint les points de contact.

Pour que cette conique soit une parabole, on doit avoir

$$\lambda = \frac{b^2v^2 - a^2u^2}{a^2b^2},$$

ce qui donne, pour l'équation de la parabole,

$$(1) \qquad (b^2vx + a^2uy)^2 - 2a^2b^2(ux + vy) + a^2b^2 = 0.$$

L'équation d'une tangente à l'ellipse de coefficient angulaire m est

$$(2) \qquad y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

En portant cette valeur de y dans (1), on aura une équation du second degré en x. En exprimant que les racines sont égales, on trouve la condition de tangence de la droite (2) avec la parabole : on a ainsi, après avoir supprimé le facteur étranger $(a^2u^2 - b^2v^2)$,

$$(3) \qquad 4(a^2m^2 + b^2)(a^2mu + b^2v)^2 = (a^2m^2 - b^2)^2.$$

Telle est l'équation donnant les quatre valeurs de m correspondant aux quatre tangentes communes.

Le cercle osculateur, au point de contact de la tangente (2), coupe l'ellipse suivant une droite passant par le point de contact et ayant pour coefficient angulaire m, en vertu de cette propriété qu'une ellipse et un cercle se coupent suivant des droites également inclinées sur les axes de l'ellipse. On trouve ainsi, pour l'équation de la corde commune à l'ellipse et au cercle osculateur,

$$(4) \qquad y + mx = \frac{b^2 - a^2m^2}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}},$$

ou, en tenant compte de la relation (3),

$$y + mx = 2(a^2mu + b^2v).$$

Sous cette forme, cette équation montre que, quelle que soit

l'une des quatre valeurs de m données par (3), la droite (4) passe par le point $x = 2a^2u$, $y = 2b^2v$.

La polaire de ce point, par rapport à l'ellipse, a pour équation

$$ux + vy = \tfrac{1}{2}.$$

En cherchant l'intersection de cette droite avec la parabole (1), on voit qu'elle est tangente au point dont les coordonnées sont

$$x = \frac{a^2u}{2(a^2u^2 - b^2v^2)}, \qquad y = \frac{-b^2v}{2(a^2u^2 - b^2v^2)}.$$

Question 1545.

Si l'on considère les trois normales menées d'un point à une parabole et le triangle formé en menant les tangentes à leurs pieds; si l'on suppose ensuite que le point, d'où l'on mène les normales à la parabole, se déplace sur un diamètre de la courbe :

1° *Tous les triangles des tangentes ont leurs sommets sur une hyperbole équilatère;*

2° *Tous ces triangles ont même point de rencontre des trois hauteurs;*

3° *Les cercles des neuf points de ces triangles passent par le sommet de la parabole;*

4° *Les centres des cercles des neuf points sont sur un même diamètre.*

5° *Si l'on considère trois normales quelconques à une parabole (ne se coupant pas au même point), le point de rencontre des hauteurs du triangle des normales et le point de rencontre du triangle des tangentes sont sur un même diamètre.* (Chauliac.)

SOLUTION

Par M. Brocard.

Soient

A, B, C les pieds des normales issues d'un point P à la parabole ayant S pour sommet et F pour foyer;

A′, B′, C′ les intersections des tangentes à la parabole aux points A, B, C;

H, H′ les orthocentres des triangles ABC, A′B′C′.

L'équation de la parabole étant

$$y^2 = 2px,$$

les points B, C ont pour coordonnées

$$(\text{B}) \qquad y = -b, \qquad x = \frac{b^2}{2p},$$

$$(\text{C}) \qquad y = -c, \qquad x = \frac{c^2}{2p},$$

les normales en ces points ont pour équations

$$(\text{BP}) \qquad y + b = \frac{b}{p}\left(x - \frac{b^2}{2p}\right),$$

$$(\text{CP}) \qquad y + c = \frac{c}{p}\left(x - \frac{c^2}{2p}\right),$$

et les coordonnées de leur point d'intersection P sont

$$(\text{P}) \qquad x = p + \frac{b^2 + bc + c^2}{2p}, \qquad y = \frac{bc(b+c)}{2p^2}.$$

On sait que le centre de gravité du triangle ABC doit se trouver sur SF; on a donc pour coordonnées du point A

$$(\text{A}) \qquad x = \frac{(b+c)^2}{2p}, \qquad y = b + c.$$

Cela posé, les tangentes AB′C′, BA′C′, CA′B′ ont pour équations

$$(\text{AB}'\text{C}') \qquad y - \frac{p}{b+c}x = \frac{b+c}{2},$$

$$(\text{BA}'\text{C}') \qquad y + \frac{p}{b}x = -\frac{b}{2},$$

$$(\text{CA}'\text{B}') \qquad y + \frac{p}{c}x = -\frac{c}{2}.$$

Les points A′, B′, C′ ont donc pour coordonnées

$$(\mathrm{A}') \qquad x = \frac{bc}{2p}, \qquad y = -\frac{b+c}{2},$$

$$(\mathrm{B}') \qquad x = -\frac{c(b+c)}{2p}, \qquad y = \frac{b}{2},$$

$$(\mathrm{C}') \qquad x = -\frac{b(b+c)}{2p}, \qquad y = \frac{c}{2}.$$

L'orthocentre H′ est déterminé par les deux équations

$$(\mathrm{B'H'}) \qquad y - \frac{b}{2} = \frac{b}{p}\left[x + \frac{c(b+c)}{2p}\right],$$

$$(\mathrm{C'H'}) \qquad y - \frac{c}{2} = \frac{c}{p}\left[x + \frac{b(b+c)}{2p}\right],$$

d'où

$$(\mathrm{H}') \qquad x = -\frac{p}{2}, \qquad y = \frac{bc(b+c)}{2p^2}.$$

Ainsi l'orthocentre H′ des triangles A′B′C′ des tangentes est sur la directrice de la parabole.

Ce résultat pouvait être prévu. En effet, la circonférence circonscrite au triangle A′B′C′ passe par le foyer F. Par conséquent, les projections du point F sur les trois côtés du triangle A′B′C′ doivent se trouver en ligne droite. Cette *ligne pédale* (droite de Simpson) n'est autre que la tangente Sy au sommet S de la parabole; et, par une propriété connue, on sait que le milieu V de la distance de l'orthocentre H′ au point F considéré sur la circonférence est sur le cercle E des neuf points, puisque ce cercle peut être défini comme figure semblable au cercle circonscrit, le centre de similitude étant l'orthocentre et le rapport de similitude, $\frac{1}{2}$ (*voir Nouvelles Annales,* questions 21, 708, 710, résolues 2e série, t. XVI et IV).

On remarque immédiatement que les points A′, B′, C′ se trouvent sur une même hyperbole équilatère; car, pour chacun d'eux, on a

$$xy = -\frac{bc(b+e)}{4p},$$

et, par une propriété connue, l'hyperbole équilatère circonscrite à un triangle A′B′C′ passe par l'orthocentre H′.

Le centre de gravité G′ du triangle A′B′C′ a pour coordonnées

$$(G') \qquad x = -\frac{b^2 + bc + c^2}{6p}, \qquad y = 0.$$

Il se trouve donc sur l'axe SF de la parabole, comme celui du triangle ABC des pieds des normales issues d'un même point P.

Ces remarques vont nous faciliter la détermination des coordonnées du centre O′ du cercle A′B′C′. Il suffit d'exprimer que les points O′, G′, H′ sont en ligne droite et que les différences de leurs coordonnées respectives sont dans le rapport des segments O′G′, G′H′, c'est-à-dire 2. On trouve ainsi

$$(O') \quad x = -\frac{b^2 + bc + c^2 - p^2}{4p}, \qquad y = -\frac{bc(b+c)}{4p^2}.$$

Sachant que le cercle ABC passe par le sommet S de la parabole et que son équation doit être de la forme

$$x^2 + y^2 - 2Mx - 2Ny = 0,$$

il suffit d'exprimer que ce cercle passe aux points B et C pour avoir l'équation

$$x^2 + y^2 - \frac{b^2 + bc + c^2 + 4p^2}{2p} x - \frac{bc(b+c)}{4p^2} y = 0,$$

et l'on vérifie aisément que ce cercle passe au point A.

Le centre O a donc pour coordonnées

$$(O) \quad x = \frac{b^2 + bc + c^2 + 4p^2}{4p}, \qquad y = \frac{bc(b+c)}{8p^2}.$$

Ainsi il est à une distance de l'axe de la parabole égale au quart de celle du point P à cet axe.

On en déduit que la distance de l'orthocentre H est égale à la moitié de celle-ci et, par suite, que O′H est un diamètre de la parabole.

Même conclusion pour la ligne H′P.

Les points A, B, C, H sont également sur une hyperbole équilatère qui a pour équation

$$\left(x - \frac{b^2 + bc + c^2}{2p}\right) y = \frac{bc(b+c)}{2p},$$

et, puisque l'orthocentre H a pour ordonnée

$$(\text{H}) \qquad y = -\frac{bc(b+c)}{4p^2},$$

on voit que son abscisse doit avoir pour expression

$$(\text{II}) \qquad x = \frac{b^2 + bc + c^2 - 4p^2}{2p}.$$

On reconnaît, en outre, que le point P est sur la même hyperbole équilatère.

Le centre de cette conique est à une distance de la tangente Sy triple de celle du centre de gravité G′ du triangle A′B′C′.

Pour établir que le cercle E des neuf points du triangle A′B′C′ passe par le point S, il suffit de montrer que la droite H′S rencontre le cercle A′B′C′ sur l'ordonnée du point F, ou, plus simplement, de remarquer que le point V, milieu de H′F, a pour ordonnée la moitié de celles des points H′, P.

Les deux hyperboles équilatères ABCHP, A′B′C′H′ se rencontrent en un point L dont l'abscisse est égale et de signe contraire à celle du centre de gravité G′ du triangle A′B′C′.

Il ne reste plus qu'à démontrer la propriété générale énoncée au n° 5.

Le triangle des trois normales aux points A, B, C supposés quelconques est défini par les équations

$$y + a = \frac{a}{p}\left(x - \frac{a^2}{2p}\right), \qquad \ldots,$$

ou, en posant

$$a = 2mp, \qquad b = 2np, \qquad c = 2qp,$$

$$y + 2mp = 2m(x - 2m^2p),$$

$$y + 2np = 2n(x - 2n^2p),$$

$$y + 2qp = 2q(x - 2q^2p).$$

Les sommets A″, B″, C″ du triangle formé par ces trois droites ont pour coordonnées

$$(\text{C}'') \qquad \begin{cases} x = p + 2p(m^2 + mn + n^2), \\ y = 4pmn(m+n), \end{cases}$$

. . . .

L'orthocentre H″ est défini par les équations

$$y - \frac{ac(a+c)}{2p^2} = -\frac{p}{b}\left(x - p - \frac{a^2 + ac - c^2}{2p}\right),$$

ou bien

$$y - 4pnm(m+n) = -\frac{1}{2q}\left[x - p - 2p(m^2 + mn + n^2)\right],$$

$$y - 4pqm(m+q) = -\frac{1}{2n}\left[x - p - 2p(m^2 + mq + q^2)\right],$$

d'où

$$y = -p[m + n + q + 2mnq].$$

D'autre part, le triangle des trois tangentes aux points A, B, C est défini par les équations

$$y + \frac{p}{a}x = -\frac{a}{2},$$

$$y + \frac{p}{b}x = -\frac{b}{2},$$

$$y + \frac{p}{c}x = -\frac{c}{2},$$

et il a pour sommets α, β, γ dont les coordonnées sont

$$(\alpha) \qquad x = -\frac{bc}{2p}, \qquad y = -\frac{b+c}{2},$$

$$(\beta) \qquad x = -\frac{ac}{2p}, \qquad y = -\frac{a+c}{2},$$

$$(\gamma) \qquad x = -\frac{ab}{2p}, \qquad y = -\frac{a+b}{2}.$$

Par conséquent, l'orthocentre H′ est déterminé par les droites

$$y + \frac{a+b}{2} = -\frac{c}{p}\left(x + \frac{ab}{2p}\right),$$

$$y + \frac{a+c}{2} = -\frac{b}{p}\left(x + \frac{ac}{2p}\right),$$

d'où

$$y = -p\frac{1}{2p^2}\left[abc + p^2(a+b+c)\right],$$

ou bien

$$y = -p(m + n + q + 2mnq),$$

c'est-à-dire la même ordonnée que pour l'orthocentre H″.

Comme vérification, il suffit de faire $a = -(b+c)$ pour retrouver l'expression de l'ordonnée des points H′ et P.

Les deux hyperboles dont il a été question se rencontrent en un point L dont l'abscisse est égale et de signe contraire à celle du centre de gravité G' du triangle A'B'C'.

Question 1622.

On considère une des coniques du faisceau déterminé par quatre points donnés A, B, C, D, *et deux autres points fixes* P *et* Q *situés dans le plan de la conique. La droite* PC *rencontre la conique en* C', *la droite* QD *rencontre la même conique en* D'. *Montrer que la droite* C'D' *passe par un point fixe, quelle que soit la conique du faisceau.*

(BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. AUDIBERT.

Soit ABCD un quadrilatère dont les côtés opposés AB et CD prolongés se coupent en O.

Prenons OB pour axe des ordonnées et OD pour ligne des abscisses. Posons en outre

$$OA = a, \qquad OB = b, \qquad OC = c, \qquad OD = d.$$

Une des coniques circonscrites au quadrilatère sera représentée par la relation

$$(1) \qquad \lambda\, xy + \left(\frac{y}{a} + \frac{x}{c} - 1\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{x}{d} - 1\right) = 0.$$

Les quatre points C, D, C', D' déterminent un autre quadrilatère dont les côtés auront respectivement pour équation

$$\begin{array}{ll} \text{CD}\ldots\ldots\ldots\ldots & y = 0, \\ \text{CC}'\ldots\ldots\ldots\ldots & y - \alpha(x - c) = 0, \\ \text{DD}'\ldots\ldots\ldots\ldots & y - \sigma(x - d) = 0, \\ \text{C}'\text{D}'\ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{y}{m} + \dfrac{x}{n} - 1 = 0, \end{array}$$

les paramètres m et n étant seuls à déterminer. Si nous écrivons qu'une conique circonscrite à ce quadrilatère

$$\lambda_1 y\left(\frac{y}{m} + \frac{x}{n} - 1\right) + [y - \alpha(x - c)]\,[y - \sigma(x - d)] = 0$$

est identique à la conique (1), nous trouvons la condition

$$\frac{a-m}{b-m}=\frac{b(a+\alpha c)(a+\sigma d)}{a(b+\alpha c)(b+\sigma d)},$$

d'où l'on déduira pour m une valeur indépendante de λ. La ligne C'D' coupe donc l'axe OB en un point fixe.

Question 1623.

Les milieux des six cordes d'intersection de deux coniques et le centre des deux coniques sont une même conique. (Barisien.)

SOLUTION

Par M. Audibert.

Une conique passant par les milieux des quatre côtés du quadrilatère ABCD,

$$\left(y+\frac{b}{c}x-\frac{a+b}{2}\right)\left(y+\frac{b}{c}x-\frac{b(c+d)}{2c}\right)$$
$$+\lambda\left(y+\frac{a}{d}x-\frac{a+b}{2}\right)\left[y+\frac{a}{d}x-\frac{a(c+d)}{2d}\right]=0,$$

passera par le milieu des diagonales AD et BC, si l'on fait

$$\lambda=-\frac{bd}{ac}.$$

Alors son équation devient

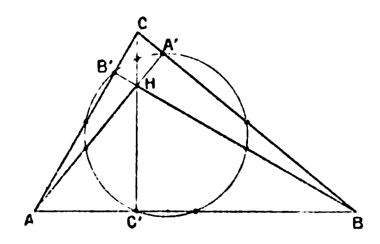
$$\frac{2y^2}{a}-\frac{2bx^2}{cd}-\frac{a+b}{2}y+\frac{b(c+d)}{cd}x=0,$$

et représente le lieu des centres des coniques (1).

Remarques de M. Barisien sur la question 1623.

On sait que le lieu des centres des coniques circonscrites à un quadrilatère est une conique dite *conique des neuf points* qui passe par les quatre milieux des côtés, les deux milieux des diagonales, le point de rencontre des diagonales et les deux points de rencontre des côtés opposés. Cette conique est une hyperbole si le quadrilatère est convexe; la conique est une ellipse si le quadrilatère est concave. Or, si l'on suppose

le quadrilatère concave formé par les trois sommets A, B, C d'un triangle et par le point de rencontre H des hauteurs de



ce triangle; la *conique des neuf points* devient alors le *cercle des neuf points.*

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Le lieu des centres des coniques circonscrites à un triangle et passant par son point de rencontre des hauteurs est le cercle des neuf points relatifs à ce triangle.

La question proposée sous le n° 1623 peut aussi s'énoncer de la façon suivante, plus complète, qui résulte des considérations précédentes.

La conique des neuf points relative au quadrilatère formé par les points d'intersection de deux coniques passe en outre par les centres de ces coniques.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1624. On considère, sur une surface, les courbes enveloppées par des plans normaux parallèles à une direction donnée. Si ces courbes forment un réseau orthogonal avec celles le long desquelles la normale fait un angle constant avec la direction donnée, la surface a une série de lignes de courbure situées dans des plans perpendiculaires à la susdite direction. (LUCIEN LÉVY.)

1625. On donne une conique, deux de ses tangentes P, Q qui se coupent sur l'axe focal, et la droite N qui passe par les

pieds des perpendiculaires abaissées de l'un des foyers sur P et Q.

Une tangente T à la conique coupe ces droites en p, q, n; on prend le point m conjugué harmonique de n par rapport à pq : démontrer que lorsqu'on fait varier T, le lieu des points tels que m est une circonférence de cercle. (MANNHEIM.)

1626. Soit une série

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_u x^u + \ldots$$

dans laquelle les coefficients a sont positifs. On suppose qu'on ait

$$\lim_{n=\infty} a_n n^p = K,$$

K étant une constante différente de zéro et p un nombre positif moindre que l'unité. Démontrer que, lorsque x tend vers 1, le produit

$$(1-x)^{1-p} f(x)$$

a pour limite

$$K\Gamma(1-p). \qquad \text{(APPELL.)}$$

1627. Soit une équation algébrique de degré m ayant pour racines des quantités réelles ou imaginaires représentées par des points $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Pour qu'un point P soit racine de l'équation dérivée, il faut et il suffit que les points $A'_1, A'_2, \ldots A'_m$ inverses des points racines par rapport au point P admettent ce dernier comme centre des moyennes distances.

(On sait que l'inverse A'_1 d'un point A_1 par rapport à P est un point situé sur la droite PA_1 à une distance PA'_1 inverse de PA_1.)

N. B.— Le théorème peut être déduit d'une remarque généralement attribuée à Chasles sur les positions d'équilibre d'un point attiré par des centres fixes en raison inverse de la distance, question qui a été étudiée en détail par M. Félix Lucas (*Comptes rendus*, 2e semestre 1868). On en conclut l'importante conséquence suivante due également à M. Félix Lucas (*Comptes rendus*, 1er semestre 1888):

Les racines de la dérivée sont situées à l'intérieur de tout polygone convexe entourant les racines de la proposée.

(APPELL.)

1628. Le lieu des points d'où l'on peut mener à la développée d'une parabole quatre normales formant un faisceau harmonique est une parabole. (E.-N. BARISIEN.)

1629. Soit B le centre de la sphère osculatrice, en A, à la ligne (A). Soit C le centre de la sphère osculatrice, en B, à la ligne (B). Démontrer que AC engendre une surface développable, et chercher les lignes, pour lesquelles AC pivote autour d'un point fixe. (E. CESARO.)

1630. Dans tout triangle, dont les côtés sont en progression géométrique, il y a égalité entre le cercle circonscrit et le ecrcle osculant la potentielle au centre de gravité,

(E. CESARO.)

1631. Chercher les courbes telles que les plans polaires de leurs points, par rapport à une sphère donnée, passent par les centres des sphères osculatrices correspondantes.

(E. CESARO.)

1632. Démontrer qu'il n'est pas possible de trouver une ligne plane dont les cercles osculateurs soient vus sous un angle constant d'un point du plan. (E. CESARO.)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1621.

La somme des carrés des axes d'une ellipse E, *doublement tangente à une ellipse donnée et qui passe par les foyers de cette courbe, est constante, quelle que soit cette ellipse* E. (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. BARISIEN.

Soient $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$ l'équation de l'ellipse donnée; $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ celle de la corde de contact de cette ellipse avec une ellipse E.

L'équation générale des ellipses E sera donc de la forme

$$(1)\quad \lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) + (x\cos\alpha + y\sin\alpha - p)^2 = 0.$$

Faisons $y = 0$ dans cette équation, nous obtenons

$$x^2(\lambda b^2 + \cos^2\alpha) - 2px\cos\alpha + p^2 - \lambda a^2b^2 = 0.$$

Pour que cette équation admette les deux racines $+c$ et $-c$, il faut les deux conditions

$$(2)\qquad p\cos\alpha = 0,$$

$$(3)\qquad c^2(\lambda b^2 + \cos^2\alpha) + p^2 - \lambda a^2b^2 = 0.$$

La condition (2) montre que les ellipses E ont la corde de contact avec l'ellipse donnée, ou bien passant par le centre de l'ellipse donnée, ou parallèle au grand axe de cette ellipse.

1° Examinons d'abord le cas où

$$p = 0.$$

On tire alors de (3)

$$\lambda = \frac{c^2\cos^2\alpha}{b^4},$$

et, par suite, l'équation (1) devient

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} a^2b^2x^2\cos^2\alpha + (a^2c^2\cos^2\alpha + b^4\sin^2\alpha)y^2 \\ \qquad + 2b^4xy\sin\alpha\cos\alpha - a^2b^2c^2\cos^2\alpha = 0. \end{array}\right.$$

Or, on sait que pour une conique dont l'équation est de la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0.$$

Si $2\mathcal{A}$ et $2\mathcal{B}$ désignent les axes de cette conique, on a

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 = \frac{(A + C)F}{B^2 - AC}.$$

Mais ici

$$A = a^2b^2\cos^2\alpha,$$
$$B = b^4\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$C = a^2c^2\cos^2\alpha + b^4\sin^2\alpha,$$
$$F = -a^2b^2c^2\cos^2\alpha.$$

Il en résulte que

$$(5)\qquad \mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 = a^2.$$

Comme conséquence, on voit que, dans l'ellipse E, le diamètre conjugué à la direction FF′ (F et F′ étant les foyers de l'ellipse donnée) est constant et égal à $2b$, en vertu du théorème d'Apollonius sur la constance de la somme des carrés des diamètres conjugués d'une même ellipse.

2° Voyons maintenant ce qui se passe lorsque la relation (2) s'annule pour

$$\cos\alpha = 0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha = 90°.$$

(3) donne alors

$$\lambda = \frac{p^2}{b^4},$$

et l'équation (1) devient

$$(6) \qquad p^2b^2x^2 + (a^2p^2 + b^4)y^2 - 2pb^4y - p^2b^2c^2 = 0.$$

Or, le centre de cette ellipse est sur l'axe des y à la distance de l'origine égale à $\frac{pb^4}{a^2p^2+b^4}$. En transportant les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes au centre de cette ellipse, il suffit de changer dans (6) y en $\left(y + \frac{pb^4}{a^2p^2+c^4}\right)$ pour avoir la nouvelle équation de l'ellipse. On obtient ainsi

$$p^2b^2x^2 + (a^2p^2 + b^4)y^2 = \frac{a^2b^2p^2(p^2c^2+b^4)}{a^2p^2+b^4}.$$

Par conséquent les carrés des demi-axes de cette ellipse ont pour expression

$$\mathcal{A}^2 = \frac{a^2(p^2c^2+b^4)}{a^2p^2+b^4}, \qquad \mathcal{B}^2 = \frac{a^2b^2p^2(p^2c^2+b^4)}{(a^2p^2+b^4)^2}.$$

On voit que, dans ce second cas, la somme $\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2$ n'est pas constante.

Pour avoir la relation qui lie $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ à a et b, il faut éliminer p^2 entre les deux valeurs de $\mathcal{A}^2$ et $\mathcal{B}^2$

$$(7) \qquad \mathcal{A}^4 = a^2(\mathcal{A}^2 - \mathcal{B}^2).$$

N. B. — MM. E. Valdès, Scaon et Varon nous ont envoyé des solutions analogues.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA MÊME QUESTION

Par M. Louis Loucheur.

Démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme. — *Considérons une conique, un diamètre* FF' *de cette conique, et les tangentes aux extrémités de ce diamètre. Marquons un point* Q *sur cette conique, tel que la tangente en* Q *fasse des angles égaux avec les cordes* QF, QF'. *Je dis que cette tangente est perpendiculaire aux tangentes en* F *et* F'.

En effet, joignons le centre O de la conique aux points de rencontre I, I' des tangentes en F et F' avec la tangente en Q. Ces droites OI, OI' coupent QF et QF' aux points C et D.

Le quadrilatère OCQD étant un parallélogramme, on en déduit que le triangle CIQ est isoscèle, et comme CI est médiane du triangle IFQ, ce triangle est rectangle en I.

On voit même que

$$OI + OI' = FQ + F'Q.$$

Donc la somme FQ + F'Q est égale à deux fois le rayon du cercle, lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique.

La réciproque est vraie.

Appliquons ce lemme dans le cas actuel, F et F' étant les foyers de l'ellipse fixe, PQ la corde de contact (qui passe d'ailleurs par le centre O) de l'ellipse E avec l'ellipse fixe.

Les tangentes en F et F' à l'ellipse E sont les perpendiculaires FI, F'I' à la tangente en R.

Soient x, y les longueurs des demi-axes de l'ellipse E. On a, puisque les tangentes à l'ellipse E passant par I sont rectangulaires

$$\overline{OI}^2 = x^2 + y^2.$$

Mais, le point I étant la projection du foyer F sur la tangente en Q à l'ellipse fixe, on a, en appelant a le demi-grand axe de cette ellipse,

$$\overline{OI}^2 = a^2.$$

Donc, finalement,

$$x^2 + y^2 = a^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — Le lieu des points de contact des tangentes aux ellipses E parallèles au grand axe de l'ellipse fixe est le cercle décrit sur le petit axe comme diamètre.

Extrait d'une lettre de M. Mannheim. — La bonne solution que M. Barisien a donnée de la question 1621 montre qu'il ne faut pas oublier dans l'énoncé le mot *concentrique* et qu'on doit dire :

La somme des carrés des axes d'une ellipse E, *concentrique à une ellipse donnée, doublement tangente à cette courbe et qui passe par les foyers de cette ellipse, est constante quelle que soit* E.

Les élèves aiment à savoir et, en cela, ils ont parfaitement raison, l'origine des questions qu'on leur propose.

S'agit-il d'une propriété soupçonnée et vérifiée, ou d'un résultat de calculs, etc.? Les auteurs des questions peuvent toujours le dire en un mot et *devraient le dire* (¹).

La question 1621 résulte de l'étude de la perspective cavalière d'une sphère. Comme, dans le cas actuel, cela n'apprend rien aux élèves de Mathématiques spéciales, je vais ajouter une solution géométrique de la question 1621.

Appelons f et f' les foyers de l'ellipse donnée, m un des points où cette courbe est touchée par une ellipse E. Abaissons de f la perpendiculaire fp sur la tangente en m à E.

On sait que la distance du centre o de l'ellipse donnée au point p est égale au demi grand axe de cette courbe. Mais op, qui est parallèle à $f'm$, passe par le milieu de fm, donc fp est tangente en f à E. Le point p est, par suite, le sommet d'un angle droit circonscrit à E; sa distance au point o est alors égale à la racine carrée de la somme des carrés des demi-axes de E et comme cette distance est égale au demi-grand axe de l'ellipse donnée, la propriété est démontrée. J'ajoute cette remarque : *la circonférencc décrite sur le petit axe de l'el-*

(¹) Il serait, en effet, très désirable que les personnes qui nous proposent des énoncés voulussent bien y joindre quelques indications sommaires sur l'origine de la question et sur sa solution. E. R.

lipse donnée est le lieu des extrémités des diamètres des ellipses E, qui sont conjugués du diamètre ff' de ces courbes.

N. B. — M. Raffaelli nous a envoyé une solution géométrique de la question 1621.

MM. Lemaire, Droz-Farny et Varon nous ont adressé des solutions géométriques de la question 1623 (p. 11*).

Dans la solution analytique publiée page 11*, il faut écrire pour l'équation finale

$$\frac{y^2}{ab} - \frac{x^2}{cd} - \frac{a+b}{2ab}y + \frac{c+d}{2cd}x = 0.$$

Question 1622 (1).

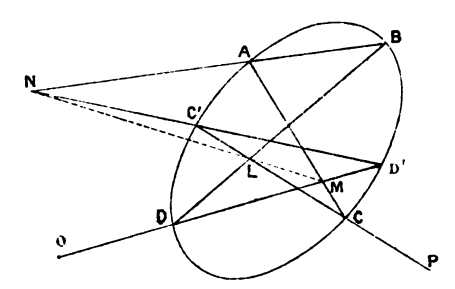
SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Par M. E. Valdès.

BD et PC se coupent au point fixe L.

AC et QD se coupent au point fixe M.

Ainsi la droite LM est fixe; soit N le point fixe où elle rencontre AB, je dis que C'D' passe par N.



Considérons l'hexagone BDD'C'CA inscrit dans la conique du faisceau. Les côtés opposés BD, CC' et AC, DD' se coupent aux points L et M; les côtés opposés AB, C'D' se coupent en un point qui appartient à la droite LM, or ce point n'est autre que N.

N. B. — MM. Lemaire et Droz-Farny nous ont envoyé des solutions analogues.

(1) *Voir* l'énoncé, p. 1*.

Question 1618.

On donne trois points dans un plan divisant respectivement les trois côtés d'un triangle dans des rapports donnés $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$, *construire le triangle.* (F. FARJON.)

SOLUTION

Par M. W.-J. GREENSTREET M. A.

Désignons $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$ par α, β, γ, en sorte qu'on a, en désignant le triangle par ABC,

$$AN : AC = \alpha, \qquad BP : BC = \beta, \qquad BM : BA = \gamma.$$

Supposons le problème résolu

Menez ND parallèle à BC. Prolongez NP jusqu'à ce qu'elle rencontre AB prolongée en M'.

On a

$$\frac{M'P}{M'N} = \frac{BP}{DN} = \frac{BC.\beta}{DN} = \frac{AC.\beta}{AN} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Donc on connaît le point M' et en le joignant à M on aura la direction du côté AB.

On aura de même la direction des autres côtés.

Question 1620.

En un point quelconque M *d'une ellipse, on mène les rayons vecteurs focaux* MF *et* MF' *qui ont leurs seconds points de rencontre avec l'ellipse en* P *et* P'. *Montrer que :*

1° *Les cercles ayant pour diamètre* FM, F'M, FP, F'P' *sont tangents au cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre.*

2° *Le lieu du point de rencontre des tangentes communes extérieures aux cercles de diamètre* FM *et* FP *est une ligne droite.*

3° *Le lieu du point de rencontre des tangentes communes extérieures aux cercles de diamètre* FM *et* F'M *est une quartique. Montrer que la portion d'aire comprise*

entre la courbe et ses asymptotes est égale aux trois quarts de l'aire de l'ellipse. (BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. W.-J. GREENSTREET M. A.

1° L'équation du cercle de diamètre FM (M, $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$) est

$$(x - a\cos\varphi)(x - ae) + y(y - b\sin\varphi) = 0;$$

celui-ci sera tangent au cercle $x^2 + y^2 = a^2$, si l'on a

$$4\left(a^2\,\overline{\cos\varphi + e}^2 + b^2\sin^2\varphi\right)\left(a^4\,\overline{1 + e\cos\varphi}^2 - a^2b^2\sin^2\varphi\right)$$
$$= 4a^6(\cos\varphi + e)^2(1 + e\cos\varphi)^2,$$

ce qui est une identité facile à vérifier.

2° Les cercles de diamètre FM, FP sont respectivement (P étant $a\cos\varphi'$, $b\sin\varphi'$),

$$\left(x - \frac{a}{2}\,\overline{\cos\varphi + e}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\sin\varphi\right)^2 = \frac{a^2}{4}(1 - e\cos\varphi)^2,$$
$$\left(x - \frac{a}{2}\,\overline{\cos\varphi' + e}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\sin\varphi'\right)^2 = \frac{a^2}{4}(1 - e\cos\varphi')^2,$$

et pour le centre de similitude externe nous avons

$$x = a(e^2 + 1)\,|\,2e,$$

ce qui donne le lieu demandé.

3° Les cercles de diamètre FM, F'M sont respectivement

$$\left(x - \frac{a}{2}\,\overline{\cos\varphi + e}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\sin\varphi\right)^2 = \frac{a^2}{4}(1 - e\cos\varphi)^2.$$
$$\left(x - \frac{a}{2}\,\overline{\cos\varphi - e}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\sin\varphi\right)^2 = \frac{a^2}{4}(1 + e\cos\varphi)^2;$$

le centre de similitude externe est

$$x = \frac{a}{2}(1 + \cos^2\varphi)\,|\cos\varphi, \qquad y = \frac{b}{2}\sin\varphi,$$

et la quartique cherchée est

$$4a^2y^4 + 4b^2y^2(x^2 - a^2) + b^4(a^2 - x^2) = 0.$$

L'aire comprise entre les asymptotes et la courbe est

$$\int_{\frac{b}{2}}^{-b} \frac{2ay^2 - ab^2}{b\sqrt{b^2 - 4y^2}}\,dy = \frac{3\pi ab}{4}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

N. B. — M. Audibert a également résolu la question.

Question 1624.

On considère sur une surface les courbes (a) enveloppées par des plans normaux parallèles à une direction donnée. Si ces courbes forment un réseau orthogonal avec celles le long desquelles la normale fait un angle constant avec la direction donnée, la surface a une série de lignes de courbure situées dans des plans perpendiculaires à la susdite direction. (Lévy.)

SOLUTION

Par M. Genty.

Prenons pour courbes coordonnées les courbes (a) et leurs trajectoires orthogonales (b).

Soient

ρ le vecteur d'un point de la surface;
ν l'orienteur de la normale en ce point;
α et β les orienteurs des tangentes aux courbes coordonnées qui s'y croisent.

On aura

$$d\rho = l\alpha\, da + m\beta\, db.$$

Si l'on pose

$$S\alpha \frac{\partial\nu}{\partial a} = p; \qquad S\alpha \frac{\partial\nu}{\partial b} = p_1; \qquad S\beta \frac{\partial\nu}{\partial a} = q; \qquad S\beta \frac{\partial\nu}{\partial b} = q_1,$$

on aura donc

$$\frac{\partial\nu}{\partial b} = p_1\alpha + q_1\beta,$$

et l'équation des lignes de courbure sera

$$(1) \qquad lq\, da^2 + (lq_1 - mp)\, da\, db - mp_1\, db^2 = 0.$$

Or les conditions du problème donnent

$$(2) \qquad S\beta\lambda = 0,$$

$$(3) \qquad S\nu\lambda = A,$$

λ étant l'orienteur de la direction donnée et A une fonction de a.

Si l'on différentie l'équation (3) par rapport à b, il vient

$$S\frac{\partial\nu}{\partial b}\lambda = 0,$$

ou, en remplaçant $\frac{\partial\nu}{\partial b}$ par sa valeur et tenant compte de l'équation (2),

$$p_1 = 0.$$

Donc l'équation (1) est satisfaite pour $da = 0$, ce qui démontre le théorème. Les courbes (a) et (b) sont les lignes de courbure et les courbes (b) sont évidemment situées dans des plans perpendiculaires à λ.

Question 1625.

SOLUTION

Par M. Barisien.

Soit F le foyer d'où l'on abaisse les perpendiculaires FI et FI' sur P et Q. On sait que le rapport I est situé sur le cercle principal de l'ellipse (ou de l'hyperbole), cercle décrit sur l'axe focal comme diamètre. Si la conique donnée était une parabole, le cercle principal deviendrait la tangente au sommet. Nous allons d'abord traiter le cas de la conique à centre.

1° *Cas de la conique à centre.* — Prenons des axes rectangulaires, l'origine étant au foyer F et l'axe des x étant l'axe focal. L'équation du cercle principal est

$$(1) \qquad (x-c)^2 + y^2 = a^2.$$

Désignons par d et h les coordonnées du point I : elles satisfont à l'équation (1) et donnent par conséquent la relation

$$(2) \qquad d^2 + h^2 = b^2 + 2cd.$$

En exprimant que les droites (P) et (Q) sont perpendicu-

laires en I et I′ à FI et FI′, on a, pour les équations de ces droites et pour celle de (N),

(P) $$hy + dx = h^2 + d^2,$$

(Q) $$-hy + dx = h^2 + d^2,$$

(N) $$x = d.$$

Nous allons définir la tangente (T) de la même façon que nous avons défini les tangentes (P) et (Q). Soient donc (α, β) les coordonnées d'un point K du cercle (1).

La perpendiculaire en K à la droite FK sera une tangente à la conique.

L'équation de la tangente (T) est par suite

(T) $$\beta y + \alpha x = \alpha^2 + \beta^2,$$

avec la relation

(3) $$\alpha^2 + \beta^2 = b^2 + 2c\alpha.$$

Si nous désignons par x, y les coordonnées de p, par x_2, y_2 les coordonnées de q, par x_3, y_3 celles de n et par X, Y celles de m, la condition pour que ces quatre points forment une proportion harmonique est

(4) $$(x_1 + x_2)(x_3 + X) = 2x_1x_2 + 2x_3X.$$

L'abscisse x_1 s'obtient en éliminant y entre (Q) et (T); de même x_3 s'obtient en éliminant x entre (Q) et (T).

Quant à x_3, elle est égale à d, de sorte que

$$x_1 = \frac{\beta(h^2 + d^2) - h(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta d + \alpha h},$$

$$x_2 = \frac{\beta(h^2 + d^2) + h(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta d + \alpha h},$$

$$x_3 = d.$$

En portant ces valeurs dans la relation (4), on trouve, toutes réductions faites,

(5) $$\left\{ \begin{aligned} &X(\alpha^2 + \beta^2)(d - \alpha) \\ &\quad = \beta^2(h^2 + d^2 - \alpha^2 - \beta^2) + \alpha(d - \alpha)(\alpha^2 + \beta^2). \end{aligned} \right.$$

Or, en retranchant (2) et (3), on a

$$h^2 + d^2 - \alpha^2 - \beta^2 = 2c(d - \alpha).$$

De sorte que, dans l'équation (5), apparaît le facteur étranger $(d - \alpha)$, et il reste

$$(6) \qquad X(\alpha^2 + \beta^2) = 2c\beta^2 + \alpha(\alpha^2 + \beta^2).$$

Pour avoir le lieu des points (X, Y), il faut éliminer α et β entre les équations (3) et (6) et la suivante

$$(7) \qquad \beta Y + \alpha X = \alpha^2 + \beta^2.$$

De (6) et (7), on déduit

$$(6)' \qquad X = \alpha + \frac{2c\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$(7)' \qquad Y = \beta + \frac{2c\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2};$$

(6)′ devient, en tenant compte de (3),

$$(8) \qquad \alpha = \frac{b^2(X - 2c)}{b^2 - 2c(X - 2c)}.$$

On trouve de même par (7)′

$$(9) \qquad \beta = \frac{b^2 Y}{b^2 - 2c(X - 2c)}.$$

En substituant ces valeurs (8) et (9) dans la relation (3), on obtient pour l'équation du lieu

$$(10) \qquad (X - c)^2 + Y^2 = a^2,$$

c'est le cercle principal de la conique.

On peut donc énoncer, comme conséquence, la propriété remarquable suivante :

Si l'on considère dans le plan d'un cercle un point F *et une corde* II′ *perpendiculaire au diamètre passant par* F, *ainsi que les droites* IH *et* I′H *perpendiculaires à* FI *et* FI′, *et si d'un point quelconque* K *situé sur le cercle on mène une droite perpendiculaire à* FK, *cette droite rencontre* IH *en p*, I′H *en q*, II′ *en n et le cercle en un second point m qui est le conjugué harmonique de n par rapport à p et q.*

2° *Cas de la parabole.* — Dans ce cas, le cercle principal devient la tangente au sommet de la parabole, le point K est

sur la tangente au sommet, tandis que le point m est rejeté à l infini : il en résulte donc que le point n qui coïncide avec K est le milieu de pq.

Il en résulte encore la propriété suivante :

Si l'on considère une parabole et un angle circonscrit à la parabole tel que le sommet de l'angle soit situé sur l'axe de la parabole, toute tangente à la parabole intercepte entre les côtés de l'angle un segment qui est divisé en deux parties égales par la tangente au sommet.

Question 1627.

Soit une équation algébrique de degré m ayant pour racines des quantités réelles ou imaginaires représentées par des points $A_1, A_2, \ldots, A_m$. *Pour qu'un point* P *soit racine de l'équation dérivée, il faut et il suffit que les points* $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ *inverses des points racines par rapport au point* P *admettent ce dernier comme centre des moyennes distances.*

On en conclura ce théorème de M. Félix Lucas :

« *Les racines de la dérivée sont situées à l'intérieur de tout polygone convexe entourant les racines de la proposée.* » (APPELL.)

SOLUTION

Par M. AUDIBERT.

La distance de P à A_1 s'exprime algébriquement par $P - A_1$ et son inverse par $\frac{1}{P - A_1}$.

On aura d'après l'énoncé

$$\sum \frac{1}{P - A_1} = \frac{f'(P)}{f(P)} = 0;$$

$f(P)$ n'est pas nul puisque les points racines sont distincts, il n'est pas non plus infini, donc

$$f'(P) = 0.$$

Réciproquement, si $f'(P) = 0$, on a

$$\sum \frac{1}{P - A_1} = \frac{f'(P)}{f(P)} = 0.$$

Posons

$$A_1 = x_1 + y_1\sqrt{-1}, \qquad P = x + y\sqrt{-1},$$

il en résulte

$$\frac{1}{P - A_1} = \frac{x - x_1 - (y - y_1)\sqrt{-1}}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$
$$= \frac{x - x_1}{l^2} - \frac{y - y_1}{l^2}\sqrt{-1},$$

et l'on aura

$$(1) \qquad \sum \frac{x - x_1}{l^2} = 0, \qquad \sum \frac{y - y_1}{l^2} = 0;$$

d'où l'on conclut que les coordonnées x et y de P sont comprises entre la plus grande et la plus petite des coordonnées correspondantes des points racines de $f(z)$.

Faisons tourner l'axe des Y d'un angle α. Les points A_1, $A_2, \ldots,$ P ne se déplacent pas. Les formules de transformation

$$x = x' - y' \sin\alpha,$$
$$y = y' \cos\alpha,$$

introduites dans (1), donnent

$$\sum \frac{x' - x'_1 - (y' - y'_1)\sin\alpha}{l^2} = 0, \qquad \sum \frac{y - y'}{l^2}\cos\alpha = 0,$$

ou simplement

$$\sum \frac{x' - x'_1}{l^2} = 0, \qquad \sum \frac{y' - y'_1}{l^2} = 0.$$

Les formules (1) et leurs conséquences subsistent donc quel que soit α.

On en conclut le théorème de M. Félix Lucas.

Question 1619.

Si deux surfaces (S) *et* (S′) *se correspondent point par point suivant une loi déterminée et si* O, P, Q, R *sont quatre points infiniment voisins de la première surface et* O′, P′,

Q', R', *les quatre points correspondants de la seconde, on a les analogies*

$$\frac{\overline{OP}}{\sin\widehat{QOR}} : \frac{\overline{O'P'}}{\sin\widehat{Q'O'R'}} = \frac{\overline{OQ}}{\sin\widehat{ROP}} : \frac{\overline{O'Q'}}{\sin\widehat{R'O'P'}} = \frac{\overline{OR}}{\sin\widehat{POQ}} : \frac{\overline{O'R'}}{\sin\widehat{P'O'Q'}}.$$

(E. Rouché.)

SOLUTION

Par M. Genty.

Soient ρ et ρ' les vecteurs des points O et O', a et b les paramètres des courbes correspondantes sur les deux surfaces, on aura

$$d\rho = l\alpha\, da + m\beta\, db,$$
$$d\rho' = l'\alpha' da + m'\beta' db,$$

α et β, α' et β' étant les orienteurs des tangentes aux courbes coordonnées sur les surfaces (S) et (S') respectivement.

Si maintenant nous désignons par les indices 1, 2 et 3 les accroissements des paramètres qui correspondent aux points P et P', Q et Q', R et R' respectivement, on aura

$$\overline{OP} = \mathrm{T}\, d_1\rho,$$

$$\sin\widehat{QOR} = \frac{\mathrm{TV}\, d_2\rho\, d_3\rho}{\mathrm{T}\, d_2\rho\, \mathrm{T}\, d_3\rho}.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \mathrm{V}\, d_2\rho\, d_3\rho &= \mathrm{V}(l\alpha\, d_2a + m\beta\, d_2b)(l\alpha\, d_3a + m\beta\, d_3b) \\ &= lm(d_2a\, d_3b - d_2b\, d_3a)\mathrm{V}\alpha\beta. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\overline{OP}}{\sin\widehat{QOR}} = \frac{\mathrm{T}\, d_1\rho\, \mathrm{T}\, d_2\rho\, \mathrm{T}\, d_3\rho}{lm(d_2a\, d_3b - d_2b\, d_3a)\mathrm{TV}\alpha\beta},$$

On trouvera de même

$$\frac{\overline{O'P'}}{\sin\widehat{Q'O'R'}} = \frac{\mathrm{T}\, d_1\rho'\, \mathrm{T}\, d_2\rho'\, \mathrm{T}\, d_3\rho'}{l'm'(d_2a\, d_3b - d_2b\, d_3a)\mathrm{TV}\alpha'\beta'},$$

Donc

$$\frac{\overline{OP}}{\sin\widehat{QOR}} : \frac{\overline{O'P'}}{\sin\widehat{Q'O'R'}} = \frac{\mathrm{T}\, d_1\rho\, \mathrm{T}\, d_2\rho\, \mathrm{T}\, d_3\rho}{\mathrm{T}\, d_1\rho'\, \mathrm{T}\, d_2\rho'\, \mathrm{T}\, d_3\rho'}\, \frac{l'm'\mathrm{TV}\alpha'\beta'}{lm\,\mathrm{TV}\alpha\beta},$$

et la proposition de M. Rouché est démontrée.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1633. On considère la quartique, podaire du centre O d'une conique. Si d'un point quelconque P du plan on mène les tangentes à cette quartique dont les points de contact sont $T_1, T_2, T_3, \ldots$ et si l'on abaisse sur cette même quartique les normales dont les pieds sont $N_1, N_2, N_3, \ldots$, on a, quel que soit le point M,

$$\overline{ON_1}^2 + \overline{ON_2}^2 + \ldots + \overline{ON_3}^2 = \text{const.}$$

Si la conique est une hyperbole équilatère, la quartique devient la lemniscate de Bernoulli, et l'on a, en plus, la relation

$$ON_1 \times ON_2 \times ON_3 \ldots = OT_1 \times OT_2 \times OT_3 \ldots$$

(E.-N. Barisien.)

1634. On considère l'hyperbole équilatère (H) et le folium (F) dont les équations sont

(H) $$x^2 - y^2 = a^2,$$
(F) $$(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2.$$

1° Si d'un point quelconque de (H) on mène les tangentes à la courbe (F), le produit et la somme des rayons vecteurs unissant le centre de (H) aux divers points de contact des tangentes sont des quantités constantes.

Si du même point on abaisse les normales sur la courbe (F), le produit et la somme des rayons vecteurs unissant le centre de (H) aux pieds des normales sont aussi des quantités constantes.

2° Si d'un point quelconque du plan, on mène les tangentes et les normales à la courbe (F), le produit des rayons vecteurs des tangentes est égal à 16 fois le produit des rayons vecteurs des normales, et la somme des rayons vecteurs des tangentes est égale à 4 fois la somme des rayons vecteurs des normales.

(Ces divers rayons vecteurs sont déterminés comme dans le § 1°).

(E.-N. Barisien.)

1635. D'un point quelconque M du plan d'une lemniscate de Bernoulli, de centre O, on mène les tangentes MT_1, MT_2, MT_3, ... à la courbe et l'on abaisse les normales MN_1, MN_2, MN_3, ... Montrer que l'on a la relation

$$OT_1.OT_2.OT_3\ldots = ON_1.ON_2.ON_3\ldots.$$

(E.-N. Barisien.)

1636. Étant données deux cubiques C et C′ dont les équations en coordonnées polaires sont

$$(C) \qquad r = \frac{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$$(C') \qquad r = \frac{a'\cos^2\theta + b'\sin^2\theta}{\cos\theta},$$

et dont le pôle est en O :

Montrer que si une droite quelconque rencontre la cubique (C) en ABC, et la cubique (C′) en A′B′C′, on a la relation

$$\frac{OA.OB.OC}{OA'.OB'.OC'} = \frac{a-b}{a'-b'}.$$

(E.-N. Barisien.)

1637. Une droite quelconque rencontre un limaçon de Pascal, dont le point de rebroussement est O, en quatre points A, B, C, D.

1° Quelle que soit la droite, on a la relation

$$OA + OB + OC + OD = \text{const.}$$

2° Si cette droite est de plus tangente à un cercle fixe C ayant son centre en O, on a aussi

$$OA.OB.OC.OD = \text{const.}.$$

3° Cette tangente au cercle C rencontre le cercle base de la conchoïde-limaçon en deux points P et Q.

On a la relation

$$OA.OB.OC.OD = \overline{OP}^2.\overline{OQ}^2.$$

(E.-N. Barisien.)

1638. On considère un cercle fixe C et un faisceau de car-

dioïdes ayant toutes même axe de symétrie et même point de rebroussement O. La somme des inverses des rayons vecteurs joignant le point O au point d'intersection du cercle avec une des cardioïdes est constante.

1639. On considère une cardioïde et un point fixe P dans son plan. Un cercle quelconque ayant son centre en P rencontre la cardioïde en 8 points. La somme des longueurs des rayons vecteurs joignant ces 8 points au point de rebroussement de la cardioïde est constante. (E.-N. Barisien.)

1640. Lieu géométrique des foyers des coniques qui touchent deux droites fixes chacune en un point fixe.

Cas particuliers. — 1° Les deux points de contact sont à égale distance du point d'intersection des deux droites données.

2° Les deux droites données sont parallèles. (Jamet.)

1641. Si un cercle a pour centre un point d'une hyperbole équilatère et passe par le symétrique de ce point par rapport au centre de l'hyperbole, il coupe cette courbe en trois autres points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.

(Lemaire.)

1642. Soit une conique inscrite à un triangle ABC en A', B', C'; a, b, c les milieux de BC, CA, AB; α, β, γ les polaires de a, b, c par rapport à la conique. Démontrer que les trois points (α, B'C'), (β, C'A'), (γ, A'B') sont en ligne droite. Généralisation. (Lemaire.)

1643. Démontrer que la droite qui contient les milieux des diagonales d'un quadrilatère normal circonscrit à une ellipse passe par le centre de cette courbe et est perpendiculaire à la droite qui joint ce centre au point de concours des normales à l'ellipse aux points de contact des côtés du quadrilatère.

(Lemaire.)

1644. Si α est l'angle sous lequel une normale à une parabole coupe l'axe de cette courbe, β l'angle sous lequel elle coupe la courbe en son second point de rencontre avec celle-ci,

on a $\tan\alpha = 2\tan\beta$. (On demande une solution géométrique.

(D'OCAGNE.)

1645. On considère une lemniscate de Bernoulli (L) dont le point double est en O et l'un des sommets en A.

On considère aussi l'hyperbole équilatère (H) ayant un de ses sommets au milieu de OA et pour asymptotes les tangentes au point double de la lemniscate.

Montrer que le cercle qui a son centre en un point quelconque C de (H) et qui passe par O est tangent à la lemniscate (L) en un point K tel que OA est bissectrice des droites OC et OK. (BARISIEN.)

1646. Étant donnés trois triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, homologiques par rapport à un axe, si l'on joint chacun des points du tableau

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

à son associé mineur, on aura neuf droites concourantes [l'associé de A est le point (B_1C_2, B_2C_1)]. (P. SONDAT.)

1647. Une solution en nombres entiers de l'équation

$$x + y + z = n$$

est prise au hasard, aucune racine n'étant zéro; chercher la probabilité que le produit des valeurs de x, y, z soit multiple de $\frac{n}{k}$, k étant un diviseur de l'entier n.

1648. Les cercles de courbure d'un ellipse en P, Q rencontrent l'ellipse en M, N. Le cercle, qui touche l'ellipse en P et qui passe par Q, et le cercle qui touche l'ellipse en Q et qui passe par P, rencontrent respectivement l'ellipse en R et S.

Démontrer que RS est parallèle à MN.

(W.-J. GREENSTREET. M. A.)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1513.

On donne un triangle ABC, *une conique* K *et un point* O *sur cette conique. Les droites* OA, OB, OC *coupent la conique* K *respectivement aux points* A′, B′, C′. *De plus, le côté* BC *rencontre cette conique aux points* A″ *et* A‴; *le côté* AC *aux points* B″, B‴; *le côté* AB *aux points* C″ *et* C‴. *Démontrer que les triangles* A′A″A‴, B′B″B‴ *et* C′C″C‴ *sont circonscrits à une même conique.* (D'OCAGNE.)

SOLUTION
Par M. A. DROZ FARNY.

On connaît ce théorème (*Nouvelles Annales,* année 1864, p. 34) : L'enveloppe des cordes communes à une conique fixe K et à un faisceau C de coniques est une courbe de troisième classe. Si la conique K passe par l'un des sommets O du quadrilatère ABCO inscrit aux coniques C, la courbe enveloppe des cordes communes se décompose en deux parties, savoir : le point O lui-même et une conique. Il suffit, dans le cas particulier, d'appliquer le théorème général aux trois paires de droites OA et BC, OB et AC, OC et AB, coniques dégénérées du faisceau OABC, pour obtenir le théorème de M. d'Ocagne.

Question 1561.

(*Voir* 3e série, t. V, p. 303);

Dans une parabole, le foyer F, *le point* D *où la tangente en un point* M *de la courbe coupe la directrice, le milieu* B *du rayon de courbure* MC *issu du point* M *sont en ligne droite.* (J. MARCHAND.)

SOLUTION
Par M. H. BROCARD.

Démonstration géométrique. — On sait que les projections A, A′ du centre de courbure C sur le rayon vecteur MF

et sur la parallèle MA′ à OX se trouvent sur une droite AA′ rencontrant OX au pied N de la normale.

Les triangles rectangles CAM, CA′M sont égaux si l'on a

$$AN = A'N;$$

donc FN parallèle à A′M rencontre AM en son milieu F.

La ligne FB est parallèle à AC et perpendiculaire à AM; mais, par une propriété connue, l'angle DFM est droit. Donc les points D, F, B se trouvent sur une même droite perpendiculaire à AM en son milieu F.

Question 1568.

Dans une cissoïde de Dioclès, l'aire comprise entre la courbe et son asymptote est égale à trois fois l'aire du cercle générateur.

SOLUTION

Par M. J. Lemaire.

R désignant le rayon du cercle générateur de la cissoïde C, si nous prenons pour origine le point de rebroussement de la courbe, et pour axe polaire la tangente en ce point, l'équation est

$$\rho = 2R\frac{\sin^2\omega}{\cos\omega}.$$

L'équation de l'asymptote est

$$\rho' = 2R\frac{1}{\cos\omega}.$$

S désignant l'aire comprise entre la courbe et l'asymptote, nous avons

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}(\rho'^2 - \rho^2)\,d\omega,$$

ou

$$S = R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{2 - 2\sin^4\omega}{\cos^2\omega}\,d\omega = R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}2(1 + \sin^2\omega)\,d\omega,$$

ou

$$S = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (3 - \cos 2\omega)\, d\omega = R^2 \left[3 - \frac{\sin 2\omega}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 3\pi R^2.$$

C. Q. F. D.

Question 1583.

On calcule une suite de fonctions d'après la loi

$$u_{n+1} = \log \frac{e^{u_n} - 1}{u_n},$$

en supposant $u_1 = x$.

Démontrer la formule

$$e^x - 1 = u_1 + u_1 u_2 + u_1 u_2 u_3 + \ldots.$$

SOLUTION

Par M. AUDIBERT.

Écrivons la loi de formation comme suit

$$e^{u_n} - 1 = u_n e^{u_{n+1}},$$

on en tire successivement

$$e^{u_{n-1}} - 1 = u_{n-1} + u_{n-1} u_n e^{u_{n+1}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$e^x - 1 \quad = u_1 + u_1 u_2 + u_1 u_2 u_3 + \ldots + u_1 u_2 \ldots u_n e^{u_{n+1}}.$$

Le dernier terme de ce développement

$$u_1 u_2 \ldots u_n e^{u_{n+1}}$$

est le reste de la série de M. Cesaro arrêtée au $n^{\text{ième}}$ terme. Nous allons démontrer que ce reste est nul pour n infini ou plus simplement que

$$\lim \text{ de } u_n = 0.$$

I. Supposons d'abord x positif. Toutes les fonctions u sont positives, car si l'on a

$$u_n > 0,$$

l'on aura

$$\frac{e^{u_n}-1}{u_n} > 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} > 0.$$

En développant la relation

$$e^{u_{n+1}} = \frac{e^{u_n}-1}{u_n},$$

on peut écrire

$$\frac{u_n}{1.2} + \frac{u_n^2}{1.2.3} + \frac{u_n^3}{1.2.3.4}$$
$$= 2\left(\frac{u_{n+1}}{1.2} + \frac{u_{n+1}^2}{1.2.2} + \frac{u_{n+1}^3}{1.2.3.2} + \ldots\right).$$

On en conclut

$$\frac{u_n}{1.2} + \frac{u_n^2}{1.2.3} + \frac{u_n^3}{1.2.3.4}$$
$$> 2\left[\frac{u_{n+1}}{1.2} + \frac{(u_{n+1}^2)}{1.2.3} + \frac{(u_{n+1})^3}{1.2.3.4} + \ldots\right].$$

Soit

$$\frac{e^{u_n}-1}{u_n} - 1 > 2\left(\frac{e^{u_{n+1}}-1}{u_{n+1}} - 1\right).$$

Considérons les inégalités

$$\frac{e^x-1}{x} - 1 > 2\left(\frac{e^{u_2}-1}{u_2} - 1\right),$$

$$2\left(\frac{e^{u_2}-1}{u_2} - 1\right) > 2^2\left(\frac{e^{u_3}-1}{u_3} - 1\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2^{n-1}\left(\frac{e^{u_n}-1}{u_n} - 1\right) > 2^n\left(\frac{e^{u_{n+1}}-1}{u_{n+1}} - 1\right).$$

En les ajoutant nous en déduirons

$$\frac{\frac{e^x-1}{x} - 1}{2^n} > \frac{e^{u_{n+1}}-1}{u_{n+1}} - 1.$$

Le premier membre de cette dernière inégalité étant nul pour n infini,

$$\lim \text{ de } u_{n+1} = 0.$$

II. Dans le cas de $x < 0$, remplaçons dans la loi de forma-

tion u_n par $-u'_n$ et x par $-x$, elle devient

$$e^{u'_{n+1}} = \frac{u'_n\, e^{u'_n}}{e^{u'_n}-1}.$$

Dans cette hypothèse, toutes les fonctions u' sont positives et, par suite, toutes les fonctions u négatives.

On avait dans le premier cas

$$(1) \qquad e^{u_1} = \frac{e^x - 1}{x};$$

on a dans le second

$$(2) \qquad e^{u'_1} = \frac{x\, e^x}{e^x - 1}.$$

En multipliant ces deux relations dans lesquelles x a même valeur, il vient

$$(3) \qquad e^{u'_1+u_1} = e^x \qquad \text{ou} \qquad u'_2 + u_2 = x.$$

Mais de (1) on conclut

$$u_2 > \frac{x}{2};$$

donc, en vertu de (3), u'_2 est inférieur à $\frac{x}{2}$ et à u_2. Les fonctions positives u' décroissent plus rapidement que les fonctions u, et la limite de u'_n est zéro comme celle de u_n.

La formule de Cesaro est vraie pour toutes les valeurs réelles de x.

Question 1589.

Si p, q, s désignent respectivement les droites qui joignent les milieux des côtés opposés et des diagonales d'un quadrilatère, α l'angle de q avec s, β l'angle de s avec p, γ l'angle de p avec q; pour que le quadrilatère soit inscriptible, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\sin 2\alpha}{p^2} + \frac{\sin 2\beta}{q^2} + \frac{\sin 2\gamma}{s^2} = 0.$$

Quelle est la signification de cette formule?

(F. Farjon.)

SOLUTION

Par M. G. Leinekugel.

Les six points milieux des côtés et des diagonales sont, comme on le sait, les six sommets d'un hexagone inscrit dans la conique Σ lieu des centres des coniques circonscrites au quadrilatère.

Le centre de Σ est au point de rencontre des droites joignant les milieux des côtés et diagonales. Cette conique admet évidemment comme directions asymptotiques les directions des diamètres des deux paraboles circonscrites au quadrilatère donné. Si le quadrilatère est inscriptible, Σ est une hyperbole équilatère; inversement, si Σ est une hyperbole équilatère, le quadrilatère est inscriptible.

Cela posé, considérons trois demi-droites *op*, *oq*, *os* faisant entre elles les angles $\gamma(op, oq)$, $\alpha(oq, os)$, $\beta(op, os)$, leurs longueurs étant p, q, s; nous allons exprimer qu'il existe une hyperbole équilatère circonscrite au triangle *pqs* et de centre *o*; nous obtiendrons de la sorte la relation à démontrer.

L'équation d'une hyperbole équilatère de centre *o* et passant par *q* est

$$\frac{x^2 - y^2}{q^2} + 2\lambda xy - 1 = 0;$$

en exprimant qu'elle passe par *p* et *s* qui ont pour coordonnées

$$\begin{cases} p\cos\gamma, \\ -p\sin\gamma, \end{cases} \quad \begin{cases} s\cos\alpha, \\ s\sin\alpha, \end{cases}$$

on en déduit

$$\frac{\cos 2\gamma}{q^2} - \lambda \sin 2\gamma - \frac{1}{p^2} = 0,$$

$$\frac{\cos 2\alpha}{q^2} + \lambda \sin 2\alpha - \frac{1}{\beta^2} = 0;$$

l'élimination de λ donne finalement

$$\frac{\sin 2\alpha}{p^2} + \frac{\sin 2\beta}{q^2} + \frac{\sin 2\gamma}{s^2} = 0.$$

L'interprétation géométrique de cette relation consiste en ce que la conique Σ lieu du centre des coniques circonscrites au quadrilatère est ici une hyperbole équilatère.

De plus, comme le centre d'une hyperbole équilatère est sur le cercle des neuf points du triangle auquel elle est circonscrite, on voit que cette relation exprime aussi que le point de rencontre des droites p, q, s est l'un des points d'intersection des cercles des neuf points des deux triangles obtenus en joignant les milieux des deux systèmes de trois droites qui sont concourantes dans le quadrilatère.

Question 1644.

Si α est l'angle sous lequel une normale à une parabole coupe l'axe de cette courbe, β l'angle sous lequel elle coupe la courbe en son second point de rencontre avec celle-ci, on a

$$\tan\alpha = 2 \tan\beta.$$

(On demande une solution géométrique.) (D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. LÉVY.

Le diamètre TX′ passe par le milieu de MM′.

L'angle M étant droit, on a

$$\text{TM} = \text{RM} \tan\alpha = 2\,\text{RM} \tan\beta;$$

d'où

$$\tan\alpha = 2 \tan\beta.$$

Question 1645.

On considère une lemniscate de Bernoulli (L) *dont le point double est en* O *et l'un des sommets en* A.

On considère aussi l'hyperbole équilatère (H) *ayant un de ses sommets au milieu de* OA *et pour asymptotes les tangentes au point de la lemniscate.*

Montrer que le cercle qui a son centre en un point quelconque C *de* (H) *et qui passe par* O *est tangent à la lemniscate* (L) *en un point* K *tel que* OA *est bissectrice de l'angle des droites* OC *et* OK. (BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

L'équation polaire de la lemniscate étant

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\omega,$$

on sait, d'après une propriété des spirales sinusoïdes, que l'angle de la tangente avec le rayon vecteur est double de celui de ce dernier avec la tangente au pôle

$$\text{TKO} = 2(45 - \omega) = 90 - 2\omega;$$

donc l'angle de la normale avec le rayon vecteur est égal à

$$90 - \text{TKO} = 2\omega.$$

Le triangle OCK est donc isoscèle. Par conséquent, C est le centre de la circonférence tangente en K à la lemniscate et passant par le pôle O.

On a immédiatement l'équation polaire du lieu des points $C(r, \theta)$.

En effet, on a

$$\omega = -\theta \qquad \text{et} \qquad \rho = 2r\cos 2\theta;$$

par suite

$$r^2 = \frac{a^2}{4\cos 2\theta}$$

ou

$$x^2 - y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Question 1648.

Les cercles de courbure d'une ellipse en P *et* Q *rencontrent l'ellipse en* M, N. *Le cercle, qui touche l'ellipse en* P *et qui passe par* Q, *et le cercle qui touche l'ellipse en* Q *et qui passe par* P *rencontrent respectivement l'ellipse en* R *et* S.

Démontrer que RS *est parallèle à* MN.

SOLUTION

Par M. Noel Dewulf, élève au lycée de Marseille.

On sait que tous les cercles tangents à une conique en un même point la coupent en deux autres points tels que la droite qui les joint est parallèle à une direction fixe. Donc QR est parallèle à PM et PS à QN. Appliquant le théorème de Pascal à l'hexagone inscrit MPSRQN, on voit que MN est parallèle à RS. Ce qu'il fallait démontrer.

N. B. — M. Barisien nous a adressé la solution analytique suivante de la même question.

En rappelant cette propriété connue que les droites d'intersection d'un cercle et d'une conique sont également inclinées sur les axes de la conique, il en résulte que les droites PM et QN sont respectivement également inclinées sur les tangentes en P et Q à l'ellipse. D'autre part, QR et la tangente en P doivent aussi être également inclinées sur les axes : par suite, QR est parallèle à PM, de même QN est parallèle à PS

Cette propriété va nous permettre de calculer facilement les coordonnées des points $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$, $S(x_4, y_4)$.

Si nous désignons par φ et φ' les angles d'anomalie excentrique en P et Q, on trouve pour l'équation de la corde PM

$$bx\cos\varphi - ay\sin\varphi = ab\cos 2\varphi.$$

En résolvant cette équation et celle de l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

on trouve pour les coordonnées de M,

$$M \begin{cases} x_1 = 2a\cos\varphi\cos 2\varphi - a\cos\varphi, \\ y_1 = -2b\sin\varphi\cos 2\varphi - b\sin\varphi. \end{cases}$$

On a de même, pour celles de N,

$$N \begin{cases} x_2 = 2a\cos\varphi'\cos 2\varphi' - a\cos\varphi', \\ y_2 = -2b\sin\varphi'\cos 2\varphi' - b\sin\varphi'. \end{cases}$$

L'équation de QR est

$$bx\cos\varphi - ay\sin\varphi = ab\cos(\varphi+\varphi').$$

Par conséquent, les coordonnées de R et S sont

$$\text{R}\left\{\begin{aligned} x_3 &= 2a\cos\varphi\cos(\varphi+\varphi') - a\cos\varphi',\\ y_3 &= -2b\sin\varphi\cos(\varphi+\varphi') - b\sin\varphi',\end{aligned}\right.$$
$$\text{S}\left\{\begin{aligned} x_4 &= 2a\cos\varphi'\cos(\varphi+\varphi') - a\cos\varphi,\\ y_4 &= -2b\sin\varphi'\cos(\varphi+\varphi') - b\sin\varphi.\end{aligned}\right.$$

Pour démontrer la proposition énoncée, il faut vérifier que

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}.$$

En remplaçant les coordonnées par leurs valeurs en fonction de φ et φ', on trouve que cette relation est satisfaite et que la valeur commune du coefficient angulaire des droites MN et RS est

$$\frac{b}{a}\left(\frac{\sin3\varphi' - \sin3\varphi}{\cos3\varphi - \cos3\varphi'}\right).$$

Question 1559.

Étant données l'arête $2a$ et la hauteur h d'une pyramide régulière, trouver l'angle compris entre deux faces latérales en supposant que la base soit un polygone régulier de n côtés. (A. Geneix Martin.)

SOLUTION

Par M. de Crès.

Soient : O le centre et AB un côté de la base; S le sommet de la pyramide. Le trièdre (AS, AO, AB) étant rectangle suivant AO et ayant pour dièdre suivant SA la moitié de l'angle cherché $2x$, on a (par une formule relative aux triangles sphériques rectangles)

$$\tang x = \frac{\tang \text{OAB}}{\sin \text{OAS}};$$

mais

$$\sin\text{OAS} = \frac{h}{\sqrt{h^2+\overline{\text{AO}}^2}} \qquad \text{et} \qquad \text{AO}\cos\text{OAB} = a.$$

Donc

$$\tang x = \frac{\tang \mathrm{OAB} \sqrt{a^2 + h^2 \cos^2 \mathrm{OAB}}}{h \cos \mathrm{OAB}}.$$

Cette formule résout la question; il suffit d'y remplacer le demi-angle à la base OAB par sa valeur évidente $\frac{n-2}{n}\frac{\pi}{2}$.

N. B. — MM. Lez, Barisien, Pisani ont résolu la même question.

Question 1569.

(*Voir* 3ᵉ série, t. VI, p. 504.)

Étant données une conique et une tangente à cette courbe, aux points A *et* B *où cette tangente rencontre les axes de cette conique, on élève des perpendiculaires à ces axes; puis du point de rencontre* M *de ces perpendiculaires on mène les tangentes* MC *et* MD *à la conique. Trouver, lorsque la tangente* AB *varie, l'enveloppe de la corde* CD *et le lieu du point de rencontre* P *des normales aux extrémités* C *et* D *de cette corde.* (CHAMBON.)

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

La conique donnée, supposée une ellipse rapportée à ses axes, a pour équation

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

L'équation générale des tangentes AB étant

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2},$$

le sommet M du rectangle OABM a pour coordonnées

$$\alpha = \frac{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}}{m},$$

$$\beta = \sqrt{a^2 m^2 + b^2},$$

et l'on en déduit

(1) $$a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2 = \alpha^2 \beta^2,$$

équation de la courbe (M), composée de quatre branches

hyperboliques asymptotes aux côtés du rectangle circonscrit à l'ellipse parallèlement à ses axes.

Les coordonnées (x, y) du point P de rencontre des normales aux extrémités de la corde CD de contact des tangentes issues d'un point $M(\alpha, \beta)$ ont pour expressions

$$x = \frac{c^2\alpha(b^2 - \beta^2)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2},$$
$$y = \frac{c^2\beta(\alpha^2 - a^2)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

Tenant compte de l'équation (1), elles deviennent

$$x^2 = \frac{c^4 a^4}{\alpha^6},$$
$$y^2 = \frac{c^4(\alpha^2 - a^2)^3}{b^2\alpha^6},$$

et l'élimination de α donne

$$a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

La courbe (P) lieu des points P est donc la développée de l'ellipse.

La corde CD, polaire du point $M(\alpha, \beta)$, a pour équation

$$a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2 b^2,$$

ou, d'après l'équation (1),

$$(2) \qquad a^4\alpha^2 y^2 = b^2(a^2 - \alpha x)^2(\alpha^2 - a^2).$$

Il resterait donc à éliminer α entre l'équation (2) et sa dérivée, c'est-à-dire entre deux équations, dont une du quatrième degré en α, et l'autre du troisième.

Le résultat, vraisemblablement fort compliqué, paraît pouvoir être avantageusement remplacé, ici comme dans la plupart des études de courbes enveloppes, par la notion de la podaire relative à l'origine.

La perpendiculaire à CD menée par l'origine a pour équation

$$y = \frac{a^2\beta}{b^2\alpha} x$$

ou

(3) $$y^2 = \frac{a^4 x^2}{b^2(\alpha^2 - a^2)}.$$

L'élimination de α entre les équations (2) et (3) donne

(4) $$y^4(a^2x^2 + b^2y^2) = x^2\left(aby - x\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}\right)^2,$$

équation qui se prête à l'emploi des coordonnées polaires.

L'enveloppe cherchée est donc la podaire inverse de la courbe (4).

Question 1643.

La droite qui joint les milieux des diagonales d'un quadrilatère normal circonscrit à une ellipse passe par le centre de cette courbe et est perpendiculaire à la droite qui joint ce centre au point de concours des normales à l'ellipse aux points de contact des côtés du quadrilatère.

(Lemaire.)

SOLUTION
Par M. Barisien.

Rappelons les formules suivantes dues à M. Desboves.

Si (α, β) et (α', β') sont les coordonnées des sommets opposés d'un quadrilatère normal circonscrit à une ellipse, et si (ξ, η) sont celles du point de concours des normales aux points de contact du quadrilatère, on a les relations

$$\alpha\alpha' = -a^2, \qquad \beta\beta' = -b^2,$$
$$\xi = \frac{-c^2\alpha(\beta^2 - b^2)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}, \qquad \eta = \frac{c^2\beta(\alpha^2 - a^2)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

Par suite

(1) $$\frac{\eta}{\xi} = -\frac{\beta(\alpha^2 - a^2)}{\alpha(\beta^2 - b^2)}.$$

D'autre part, d'après un théorème dû à Newton, le lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère est la droite qui joint les milieux des diagonales.

Il résulte de là que, la droite qui joint $(\alpha\beta)$ et $(\alpha'\beta')$ et dont le milieu a pour coordonnées

$$x = \frac{\alpha + \alpha'}{2}, \qquad y = \frac{\beta + \beta'}{2}$$

étant une des diagonales, la droite qui réunit son milieu au centre de l'ellipse a pour coefficient angulaire

$$\frac{y}{x} = \frac{\beta + \beta'}{\alpha + \alpha'}$$

ou, en tenant compte des premières relations de M. Desboves,

$$(2) \qquad \frac{y}{x} = \frac{\alpha(\beta^2 - b^2)}{\beta(\alpha^2 - a^2)}.$$

Par suite

$$\left(\frac{y}{x}\right) \times \left(\frac{\eta}{\xi}\right) = -1,$$

ce qui démontre la proposition.

Question 1641.

Si un cercle a pour centre un point d'une hyperbole équilatère et passe par le symétrique de ce point par rapport au centre de l'hyperbole, il coupe cette courbe en trois autres points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral. (Lemaire.)

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Par M. Brocard.

Observons d'abord que si une hyperbole équilatère et une circonférence données se rencontrent en quatre points A, B, C, D, les points A', B', C', D', diamétralement opposés sur l'hyperbole, sont les orthocentres des triangles BCD, ACD, ABD, ABC.

L'orthocentre D' du triangle ABC se trouve sur l'hyperbole. Soit P l'extrémité du diamètre POD'. Je dis que ce point P se trouve sur la circonférence ABC.

En effet, d'après les propriétés de l'hyperbole équilatère, l'arc AC est vu des points P, D', sous le même angle (ou sous des angles supplémentaires).

Dans le triangle ABC, dont l'orthocentre est D', les angles CD'A, CBA sont supplémentaires; donc les angles CPA, CBA sont égaux, ce qui montre que les points A, B, C, P sont concycliques.

Mais les points A, B, C, D sont à la fois sur les deux courbes données; donc les points P, D coïncident.

Dans le cas où la circonférence a D′ pour centre et DOD′ pour rayon, le point D′ doit être l'orthocentre du triangle inscrit ABC; par suite, ce triangle doit être équilatéral.

N. B. M. Brocard nous fait observer qu'il a fait connaître, dès 1874 (*Mémoires d'Alger*), ce théorème, qui s'est présenté depuis à plusieurs géomètres et qui ne diffère pas de la question 1507, résolue analytiquement à la page 382 du quatrième Volume de la 3e série des *Nouvelles Annales*. M. Barisien, qui a également traité la question par l'Analyse, ajoute que les normales à l'hyperbole en A, B, C sont concourantes.

Question 1601.

Inscrire dans une sphère donnée un polygone dont chaque côté passe par un point donné. (Tarry.)

Cette question doit être considérée comme résolue; car M. Tarry a indiqué d'une part (t. X, 3e série, p. 5*), la construction à faire et, d'autre part (t. XI, p. 257), les considérations sur lesquelles la démonstration est fondée.

ERRATA.

Page 39*, ligne 16, *au lieu de* M. Lévy, *lisez* M. Léry.

TABLE DES MATIÈRES DES EXERCICES.

Questions proposées.

Questions résolues.

18028 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.